Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 143, №2, P.21-33
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.37.17**

К.С. Мусабеков

Кокшетауский университет имени Ш. Уалиханова, ул. Абая, д. 76, Кокшетау, 020000, Казахстан
(E-mail: it.kgu@mail.ru)

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ В ХИМИЧЕСКОМ РЕАКТОРЕ

Аннотация: В работе рассматривается задача оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе используемом в химической технологии. В реактор подается газ, который подвергается экзотермической реакции первого порядка. Реактор имеет внешнюю оболочку - кожух. Через кожух течет охлаждающая реактор жидкость. В свою очередь реактор изменяет температуру в кожухе.

В качестве функции управления принимается скорость подачи охлаждающей жидкости в кожух. Подаваемая в кожух жидкость имеет постоянную температуру. Поэтому функция управления зависит лишь от времени.

Величины температура реактора, концентрации реагирующей смеси меняются по протяженности реактора и времени реакции. Математическая модель реактора состоит из дифференциальных уравнений в частных производных и соответствующих краевых, начальных условий. При этом на температуру в реакторе и на управляющую функцию накладываются соответствующие ограничения. Ограничение на температуру в реакторе учитывается при помощи введения в целевом функционале (в качестве слагаемой) штрафной функции имеющего тип линейной срезки. Такой тип функции штрафа в математическом программировании обычно приводит к точному выполнению ограничении. Ограничения на управляющую функцию заданы в форме неравенств.

В качестве целевого функционала принимается суммарное за фиксированный промежуток времени количество не прореагировавшего вещества на выходе реактора. Как отмечено выше, в целевой функционал добавляется функция штрафа. Целью управления является минимизация этого функционала.

В работе доказывается теорема существование оптимального управления в такой задаче. В ходе доказательства используется ограниченность решений системы дифференциальных уравнений в частных производных в гельдеровских нормах. Это позволяет воспользоваться критерием Арцеля о компактности множества непрерывных функций. В ходе доказательства также используется слабая компактность множества функций управления в пространстве $L_2(0,T)$. При неограниченном увеличении штрафного коэффициента доказана сходимость к нулю функции штрафа, т.е. показана выполнимость, в пределе, фазового ограничения на температуру в реакторе. Получены также некоторые, необходимые в дальнейшем, свойства слагаемых целевого функционала.

Ключевые слова: математическая модель, химический реактор, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, существование оптимального управления, штрафная функция.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/2.3

2000 Mathematics Subject Classification: 49J20

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов [1] часто встречаются задачи содержащие фазовое ограничение. Решение таких задач, даже в случае систем с сосредоточенными параметрами, сопряжено с определенными трудностями как в теоретическом исследовании свойств оптимальных процессов, так и в разработке практических алгоритмов численного решения. В случае же системы с распределенными параметрами, процесс решения таких задач становится достаточно трудной проблемой.

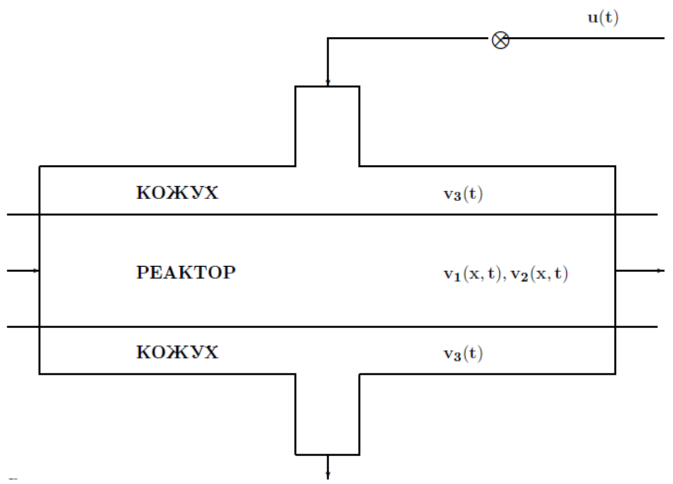
При разработке алгоритмов численного решения задачи оптимального управления активно используется необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [1]. Если для систем с сосредоточенными параметрами имеется общая теория принципа максимума [1], то для систем с распределенными параметрами, в силу сложности проблемы, о такой общей теории говорить не приходится. В работе [2] предлагается общая схема вывода необходимого условия оптимальности, но это не облегчает проблемы поиска оптимального управления, поскольку в этом случае возникает необходимость учета мер множеств на которых фазовые переменные выходят на границу допустимых областей своего изменения.

Для учета фазового ограничения часто используется так называемый метод "штрафных функций". Метод штрафных функций широко используется в теории математического программирования. Описание метода, решение ряда экстремальных задач посредством этого метода приведены в работах [3-5]. В [6-8] метод штрафов используется при решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. В работе [8] штрафная функция, по терминологии работы [5], имела тип функции квадратичной срезки, при нарушении ограничения на температуру реактора.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления процессом в неадиабатическом трубчатом реакторе, в котором роль фазового ограничения исполняет верхняя граница допустимого изменения температуры в реакторе. Учет такого ограничения осуществляется посредством метода штрафных функций, причем в качестве штрафной функций используется линейная функция типа срезки. Такой тип функции штрафа часто приводит к точному выполнению фазового ограничения. В работе устанавливается существование оптимального управления в такой задаче со штрафом и доказывается сходимость метода штрафов при неограниченном увеличении штрафного коэффициента.

2. Математическая модель неадиабатического трубчатого реактора

Рассматривается неадиабатический трубчатый реактор [9]:



В реактор подается газ, который подвергается экзотермической реакции первого порядка. Реактор имеет внешнюю оболочку (кожух). Через кожух течет жидкость.

Жидкость в кожухе охлаждает реактор. В свою очередь реактор изменяет температуру жидкости в кожухе.

По протяженности кожуха окружающего реактор, охлаждающая жидкость хорошо размешивается и поэтому считается, что по протяженности кожуха температура охлаждающей жидкости будет одинаковой во всех внутренних точках кожуха. Следовательно, температура охлаждаюшей жидкости меняется лишь во времени, т.е. $v_3 = v_3(t)$.

Охлаждающая жидкость может подаваться в кожух с различной степенью интенсивности, т.е. с различной скоростью. Отработавшая жидкость отводится из кожуха. Это влечет за собой изменение температуры в кожухе, что в свою очередь влияет на температуру в реакторе.

Известно, что увеличение температуры в реакторе влечет за собой более активное течение реакции (т.е. ускоряется процесс изменения концентрации). Поэтому, умение управлять температурой в реакторе является важным моментом в управлении ходом работы реактора. Роль такого управляющего параметра здесь исполняет функция $u(t)$ являющаяся скоростью подачи охлаждающей жидкости в кожух.

При составлении математической модели реактора предполагалось выполнение следующих условий:

1. Концентрация $v_1(x,t)$, температура реактора $v_2(x,t)$, температура охлаждающей жидкости в кожухе $v_3(t)$, скорость $u(t)$ подачи в кожух охлаждающей жидкости являются переменными, а все остальные параметры модели $a, b, c, ...$ являются постоянными числами.

2. Объем охлаждающей жидкости во внешнем кожухе является постоянной величиной.

3. Температурные потери через стенки реактора являются ничтожными, что ими можно пренебречь.

При выполнении этих трех условий, на основе учета баланса масс и температуры, в работе [9] была предложена математическая модель неадиабатического трубчатого реактора.

Пусть $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T-$ фиксированное число. В области Q_T математическая модель неадиабатического трубчатого реактора записывается в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - cv_1 f(v_2), \\ \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + kv_1 f(v_2) + g(v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \frac{dv_3(t)}{dt} = p(\int\limits_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)) + u(t)(E - v_3(t)) \end{array}\right\} \tag{1}$$

с граничными

$$\left.\begin{array}{l} a\frac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \frac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b\frac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \frac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

и начальными условиями

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), v_2(x,0) = v_{20}(x), v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, p, E, $v_{30}-$ константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора и температуры охладителя соответственно.

3. Постановка задачи

В работе будут использованы обозначения функциональных пространств, принятые в работах [10],[11]. Приведем еще некоторые обозначения:

$C_1[0,T]$ — банахово пространство непрерывных функций $v(t)$, заданных на $[0,T]$ и удовлетворяющих условию Липшица, с нормой

$\|v\|_{C_1} = \sup\limits_{0\le t\le T}|v(t)| + \sup\limits_{t',t''\in[0,T],t'\neq t''}\frac{|v(t')-v(t'')|}{|t'-t''|}$;

Множество допустимых управлений

$U_\partial = \{u(t) : 0 \le u(t) \le u_0 = const,\ u(t)\ —\ \text{измеримая функция},\ 0 \le t \le T\}$.

При соответствующей гладкости начальных данных и выполнении условия согласования начальных и граничных данных

$$a\cdot\frac{dv_{10}(0)}{dx} - v_{10}(0) = -1,\ \frac{dv_{10}(1)}{dx} = 0,\ b\cdot\frac{dv_{20}(0)}{dx} - v_{20}(0) = -1,\ \frac{dv_{20}(1)}{dx} = 0$$

в работах [12,13] была доказана теорема существования и единственности решения

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3(t) \in C_1[0,T],\ 0 < \alpha < 1$$

системы (1)-(3) при произвольной функции $u(t) \in U_\partial$.

Решения системы (1)-(3), при $u(t) \in U_\partial$, удовлетворяют следующим условиям [12]: если $0 \le v_{10}(x) \le 1$, $0 < v_{20}(x) \le b_3$, $v_{30} > 0$ для любой точки $x \in \bar\Omega$, то

$$0 \le v_1(x,t) \le 1, \delta \le v_2(x,t) \le b_1, \delta_1 \le v_3(t) \le b_2, \tag{4}$$

для любой точки $(x,t) \in \overline{Q_T}$, где $\delta, \delta_1, b_1, b_2, b_3$ -некоторые положительные постоянные числа, зависящие лишь от параметров системы и начальных условий задачи.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1,t)dt, \tag{5}$$

т.е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1)-(3) и следующих ограничениях на управление $u(t)$ и функцию $v_2(x,t)$:

$$u(t) \in U_\partial, \tag{6}$$

$$v_2(x,t) \le v_2^* = const. \tag{7}$$

Таким образом имеем следующую задачу оптимального управления.

Задача 1. Задача с фазовым ограничением.

Среди всех измеримых управлений удовлетворяющих условию (6), найти такое $u(t)$, при котором для соответствующего решения $v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(t)$ системы (1)-(3), выполняется условие (7) и функционал (5) достигает минимального значения.

В работе [12] доказано существование оптимального управления в задаче 1.

Для удобства учета фазового ограничения (7) функционал (5) заменяется функционалом

$$J_{A,1}(u) = \int_0^T v_1(1,t)dt + A\int_0^T\int_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt, \tag{8}$$

где A - положительная постоянная величина (штрафной коэффициент), $\Phi_1(v_2)$ - штрафная функция,

$$\Phi_1(v_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } v_2(x,t) \le v_2^* \\ v_2(x,t) - v_2^*, & \text{если } v_2(x,t) > v_2^*. \end{cases}$$

Теперь рассматриваемая задача оптимального управления химическим реактором может быть сформулирована следующим образом.

Задача 2. Задача со штрафом.

Среди всех измеримых управлений удовлетворяющих условию (6), найти такое $u(t)$, при котором для соответствующего решения $v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(t)$ системы (1)-(3) функционал (8) достигает минимального значения.

4. Существование оптимального управления в задаче со штрафом

Рассмотрим теорему существования оптимального управления в задаче 2.

Теорема 1. Существует оптимальное управление являющееся решением задачи 2, т.е. существует измеримая функция $u^0(t) \in U_\partial$ для которой соответствующее решение $v_1^0(x,t)$, $v_2^0(x,t)$, $v_3^0(t)$ системы (1)-(3) доставляет минимум функционалу $J_{A,1}(u)$,

$$J_{A,1}(u^0) = \min_{u \in U_\partial} J_{A,1}(u).$$

Доказательство. При каждом $u(t) \in U_\partial$ в силу [13], система (1)-(3) имеет единственное решение

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3(t) \in C_1[0,T],$$
$$\|v_i\|_{2+\alpha}^{Q_T} \le c_1, i = 1,2, \ \|v_3\|_{\frac{\alpha}{2}}^{[0,T]} \le c_2 \tag{9}$$

Здесь и далее через c_1, c_2 будем обозначать различные постоянные величины, зависящие лишь от параметров системы, начальных условий, и точные значения которых для нас не существенны.

Рассмотрим теперь множество всех решений v_1, v_2, v_3 системы (1)-(3) при различных $u(t) \in U_\partial$. Поскольку все решения системы (1)-(3) равномерно ограничены при $u(t) \in U_\partial$, то существует

$$\inf_{u \in U_\partial} J_{A,1}(u) = m_1, \ m_1 = const > 0.$$

Пусть $\{u^n(t)\} \subset U_\partial$ минимизирующая последовательность (при $0 \le t \le T$), так что $J_{A,1}(u^n) \to m_1$ (при $n \to \infty$), монотонно убывая. При этом, для каждого $u^n(t)$ имеем

$$v_1^n(x,t), v_2^n(x,t) \in H^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3^n(t) \in C_1[0,T]$$

являющихся решениями системы (1)-(3), и $\|v_i^n\|_{2+\alpha}^{Q_T} \le c_1, (i = 1,2)$, $\|v_3^n\|_{\frac{\alpha}{2}}^{[0,T]} \le c_2$,

$$v_3^n(t) = v_{30} + \int_0^t [p(\int_0^1 v_2^n(x,s)dx - v_3^n(s)) + u^n(s)(E - v_3^n(s))]ds. \tag{10}$$

Последовательность $\{v_3^n(t)\}$ равностепенно непрерывна. Действительно, если $t_1, t_2 \in [0,T]$, $|t_1 - t_2| < \delta,$ то

$$|v_3^n(t_1) - v_3^n(t_2)| \le c_2 |\int_{t_2}^{t_1} ds| \le c_2 \delta = \epsilon,$$

для всех $n \in N$. Следовательно, последовательность $v_3^n(t)$ компактна в $C[0,T]$.

Первое из неравенств (9) запишем в виде

$$\max_{\overline{Q_T}} |v_i^n| + \max_{\overline{Q_T}} |D_x v_i^n| + \max_{\overline{Q_T}} |D_x^2 v_i^n| + \max_{\overline{Q_T}} |D_t v_i^n|$$
$$+ \sup_{(x,t),(x',t) \in \overline{Q_T}} \frac{|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t)|}{|x - x'|^\alpha} + \sup_{(x,t),(x',t) \in \overline{Q_T}} \frac{|D_x^2 v_i^n(x,t) - D_x^2 v_i^n(x',t)|}{|x - x'|^\alpha}$$
$$+ \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T}} \frac{|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x,t')|}{|t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} + \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T}} \frac{|D_x v_i^n(x,t) - D_x v_i^n(x,t')|}{|t - t'|^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$
$$+ \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T}} \frac{|D_x^2 v_i^n(x,t) - D_x^2 v_i^n(x,t')|}{|t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}} \le c_1, i = 1,2. \tag{11}$$

Из неравенства (11) следует равномерная ограниченность последовательностей $\{v_i^n\}$, $\{D_x v_i^n\}$, $\{D_x^2 v_i^n\}$, $\{D_t v_i^n\}$, $i = 1,2$.

Покажем их равностепенную непрерывность. Для этого рассмотрим точки $P(x,t), R(x',y') \ \in \overline{Q_T}$ и введем обозначение $d(P,R) = |x - x'|^\alpha + |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}$. Из (11) следует, что

$$|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t)| \le c_1 |x - x'|^\alpha, \ |D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x,t')| \le c_1 |t - t'|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$|D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t')| \le |D_t v_i^n(x,t) - D_t v_i^n(x',t)| + |D_t v_i^n(x',t) - D_t v_i^n(x',t')|$$

$$\leq c_1(|x-x'|^{\alpha}+|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}})=c_1 d(P,R),$$

т.е.

$$|D_t v_i^n(x,t)-D_t v_i^n(x',t')|\leq c_1 d(P,R),\ i=1,2. \tag{12}$$

Совершенно аналогично получим, что

$$|D_x^2 v_i^n(x,t)-D_x^2 v_i^n(x',t')|\leq c_1 d(P,R),\ i=1,2. \tag{13}$$

Чтобы показать выполнимость аналогичных неравенств для $v_i^n(x,t)$ воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа

$$v_i^n(x,t)-v_i^n(x',t)=D_x v_i^n(x'+\theta_i(x-x'))(x-x'),\ (0<\theta_i<1),\ i=1,2.$$

Тогда, в силу формулы (11) имеем

$$|v_i^n(x,t)-v_i^n(x',t)|\leq c_1|x-x'|=c_1|x-x'|^{\alpha}|x-x'|^{1-\alpha}\leq c_1|x-x'|^{\alpha},$$

так как $x,x'\in(0,1)$, $|x-x'|^{1-\alpha}<1$, $i=1,2$. Аналогично

$$|v_i^n(x,t)-v_i^n(x,t')|\leq c_1|t-t'|=c_1|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}|t-t'|^{\frac{2-\alpha}{2}}\leq c_1 T^{\frac{2-\alpha}{2}}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}},$$

так как $t,t'\in(0,T)$, $|t-t'|<T$, $i=1,2$. Обозначая $c_3=\max\{1,T^{\frac{2-\alpha}{2}}\}$ имеем

$$|v_i^n(x,t)-v_i^n(x',t')|\leq c_1c_3 d(P,R),\ i=1,2. \tag{14}$$

Снова пользуясь формулой Лагранжа, получим

$$|D_x v_i^n(x,t)-D_x v_i^n(x',t)|=|D_x^2 v_i^n(x'+\theta_i(x-x'))||(x-x')|\leq c_1|x-x'|=c_1|x-x'|^{\alpha}|x-x'|^{1-\alpha}$$
$$\leq c_1|x-x'|^{\alpha},\ i=1,2;\ 0<\theta_i<1.$$

Таким образом имеем

$$|D_x v_i^n(x,t)-D_x v_i^n(x',t)|\leq c_1|x-x'|^{\alpha},\ i=1,2. \tag{15}$$

Чтобы получить соответствующую оценку приращения $D_x v_i^n(x,t)$ по переменной t, через $|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}$ воспользуемся неравенством (11)

$$|D_x v_i^n(x,t)-D_x v_i^n(x,t')|\leq c_1|t-t'|^{\frac{1+\alpha}{2}}=c_1|t-t'|^{\frac{1}{2}}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}<c_1\sqrt{T}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}},\ i=1,2,$$

т.е.

$$|D_x v_i^n(x,t)-D_x v_i^n(x,t')|\leq c_1\sqrt{T}|t-t'|^{\frac{\alpha}{2}},\ i=1,2.$$

Обозначим $c_4=\max\{1,\sqrt{T}\}$. Тогда из неравенства (15) и последнего неравенства получим

$$|D_x v_i^n(x,t)-D_x v_i^n(x',t')|\leq c_1c_4 d(P,R).\ i=1,2. \tag{16}$$

Обозначим $c_5=\max\{c_1,c_1c_3,c_1c_4\}=c_1\max\{1,T^{\frac{2-\alpha}{2}},\sqrt{T}\}$. Из неравенств (12)-(14), (16) следуют, что последовательности $\{v_i^n(x,t)\},(i=1,2)$ являются равностепенно непрерывными со всеми производными 1-го и 2-го порядков по x и 1-го порядка по t. Действительно, рассмотрим произвольное $\epsilon>0$ и положим $\delta=\frac{\epsilon}{c_5}$. Тогда из $d(P,R)\leq\delta$ следует, что

$$|D_t v_i^n(P)-D_t v_i^n(R)|\leq c_5\delta=\epsilon,\ |D_x^2 v_i^n(P)-D_x^2 v_i^n(R)|\leq\epsilon,\ |v_i^n(P)-v_i^n(R)|\leq\epsilon,$$
$$|D_x v_i^n(P)-D_x v_i^n(R)|\leq\epsilon,(i=1,2).$$

Таким образом, последовательности $\{v_i^{(n)}(x,t)\}$, $i=1,2$ компактны в $C^{2,1}(\overline{Q_T})$. Выберем из $\{u^n(t)\}$ подпоследовательность управлений (которую снова обозначим через $u^n(t)$) так, чтобы $v_3^n(t)\to v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ и $v_i^n(x,t)\to v_i^0(x,t)$, $i=1,2$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$, при $n\to\infty$. Тогда имеем

$$f(v_2^n)\to f(v_2^0),\int_0^t\int_0^1 v_2^n(x,\tau)dxd\tau\to\int_0^t\int_0^1 v_2^0(x,\tau)dxd\tau,$$
$$|v_1^n f(v_2^n)-v_1^0 f(v_2^0)|\leq f(v_2^n)|v_1^n-v_1^0|+v_1^0|f(v_2^n)-f(v_2^0)|\to 0$$

при $n\to\infty$.

Последовательность $\{u^n(t)\}\subset U_\partial\subset L_2(0,T)$, поэтому в силу [14], $\{u^n(t)\}$ слабо компактна в $L_2(0,T)$, т.е. из последовательности $\{u^n(t)\}$ можно выбрать подпоследовательность (которую снова обозначим через $u^n(t)$) так чтобы $u^n(t) \to u^0(t)$ слабо в $L_2(0,T)$, при $n \to \infty$. Для этой последовательности $\{u^n(t)\}$ рассмотрим соответствующее решение $\{v_1^n(x,t)\}$, $\{v_2^n(x,t)\}$, $\{v_3^n(t)\}$ системы (1)-(3).

Доказательство принадлежности $u^0(t) \in U_\partial, 0 \le t \le T$ проведем аналогично [1]. Имеем $u^n(t) \le u_0 = const$. Покажем, что $u^0(t) \le u_0$. Обозначим $K = \{t | t \in [0,T], u^0(t) > u_0\}$. Пусть $\chi(t)$ -характеристическая функция множества K. Эта функция измерима и ограничена, т.е. $\chi(t) \in L_2(0,T)$. В силу слабой сходимости последовательности $\{u^n(t)\}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \chi(t)[u^0(t) - u^n(t)]dt = 0.$$

Так как $u^0(t) - u^n(t) > 0$ на K, то $mesK = 0$. Итак, для почти всех $t \in [0,T]$ имеем $u^0(t) \le u_0$. Аналогичные рассуждения проводим и для другого конца отрезка $[0,u_0]$. В итоге имеем $0 \le u^0(t) \le u_0$ для почти всех $t \in [0,T]$. Переопределим $u^0(t)$ на соответствующем множестве меры нуль так, чтобы $0 \le u^0(t) \le u_0$ для всех $t \in [0,T]$.

Далее имеем

$$|\int_0^t (E - v_3^n(s))u^n(s)ds - \int_0^t (E - v_3^0(s))u^0(s)ds| \le |\int_0^t (v_3^0(s) - v_3^n(s))u^n(s)ds|$$

$$+|\int_0^t (E - v_3^0(s))(u^n(s) - u^0(s))ds| \to 0, n \to \infty.$$

Таким образом, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим из (10)

$$v_3^0(t) = v_{30} + \int_0^t [p(\int_0^1 v_2^0(x,s)dx - v_3^0(s)) + u^0(s)(E - v_3^0(s))]ds. \tag{17}$$

В уравнении (17) $v_3^0(t)$-непрерывная функция, а интеграл в правой части -абсолютно непрерывная функция. Поэтому и $v_3^0(t)$ -абсолютно непрерывная функция.

Мы показали, что функции v_1^0, v_2^0, v_3^0, u^0 удовлетворяют системе уравнений (1)-(3). Имеем

$$J_{A,1}(u^n) = \int\limits_0^T v_1^n(1,t)dt + A\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \to \int\limits_0^T v_1^0(1,t)dt + A\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt$$

$$= m = J_{A,1}(u^0), n \to \infty,$$

$u^0(t)$-измеримое оптимальное управление, $0 \le u^0(t) \le u_0$. В силу работы [13] существует решение

$$v_1(x,t), v_2(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}), v_3(t) \in C_1[0,T]$$

системы (1)-(3), соответствующее управлению $u^0(t)$. Тогда в силу единственности решения системы (1)-(3), соответствующее управлению $u^0(t)$, имеем

$$v_1(x,t) = v_1^0(x,t), v_2(x,t) = v_2^0(x,t), v_3(t) = v_3^0(t), (x,t) \in \overline{Q_T}.$$

Теорема 1 доказана.

5. Сходимость метода штрафов

Установим взаимосвязи между задачами 1 и 2. Для каждого конечного A в задаче 2 по теореме 1 существует оптимальное управление. Покажем, что при увеличении A решение задачи 2 сходится в определенном смысле к решению задачи 1. Для этого рассмотрим положительную и монотонно возрастающую последовательность чисел $\{A_n\}$ и такую, что $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Минимизируемый функционал в задаче 2 запишем в виде

$$J_{A_n,1}(u) = \int\limits_0^T v_1(1,t)dt + A_n\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt, \tag{18}$$

$n = 1, 2, \ldots.$ Для каждого $A_n < \infty$ обозначим через

$$(v_1^n(x,t), v_2^n(x,t), v_3^n(t), u^n(t)) \in H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}) \times H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}) \times C_1[0,T] \times U_\partial$$

оптимальный процесс в задаче 2.

Взаимосвязь между задачами 1 и 2 устанавливается следующим утверждением.

Теорема 2. Пусть существует оптимальный процесс в задаче 1.

Тогда

1.последовательность оптимальных управлений $\{u^n(t)\}$ в задаче 2, при $n \to \infty$ сходится слабо в $L_2(0,T)$ к $u^0(t)$;

2.последовательности $\{v_1^n(x,t)\}$, $\{v_2^n(x,t)\}$ сходятся соответственно к $v_1^0(x,t)$, $v_2^0(x,t)$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$;

3.последовательность $\{v_3^n(t)\}$ сходится к $v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ и процесс $\{v_1^0(x,t), v_2^0(x,t), v_3^0(t),\ u^0(t)\}$ будет оптимальным в задаче 1.

Доказательство. Пусть m -минимальное значение функционала $J(u)$ в задаче 1. В силу теоремы 1 для каждого конечного $A_n \in \{A_n\}$ существует оптимальное управление $u^n(t)$ задачи 2 и значение $J_{A_n,1}(u^n)$-конечное число. При этом

$$J_{A_n,1}(u^n) \leq m, \tag{19}$$

$n = 1, 2, \ldots.$ Действительно, если бы оказалось, что $J_{A_n,1}(u^n) > m$, то управление $u^n(t)$ не было бы оптимальным для задачи 2, поскольку существует оптимальный процесс в задаче 1, на котором значение функционала (18) окажется равным m.

Пусть $u(t)$ - произвольное допустимое управление, $v_1(x,t), v_2(x,t), v_3(t)$ - соответствующее решение системы (1)-(3). Рассмотрим функционал (18). Отсюда видно, что $J_{A_n,1}(u^n) < J_{A_n,1}(u)$. Если $u = u^{n+1}(t)$ -оптимальное управление для $A = A_{n+1}$, то

$$J_{A_n,1}(u^n) \leq \int\limits_0^T v_1^{n+1}(1,t)dt + A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^{n+1}(x,t))dxdt = J_{A_n,1}(u^{n+1}).$$

Далее, так как $A_n < A_{n+1}$, то

$$J_{A_n,1}(u^{n+1}) \leq \int\limits_0^T v_1^{n+1}(1,t)dt + A_{n+1} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^{n+1}(x,t))dxdt = J_{A_{n+1},1}(u^{n+1}).$$

Из последних двух неравенств имеем

$$J_{A_n,1}(u^n) \leq J_{A_n,1}(u^{n+1}) \leq J_{A_{n+1},1}(u^{n+1}). \tag{20}$$

Таким образом, последовательность $\{J_{A_n,1}(u^n)\}$ ограничена сверху числом m и монотонно возрастает. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} J_{A_n,1}(u^n) = m_1, \tag{21}$$

где $m_1 \leq m$.

Поскольку функции $v_1^n(x,t), v_2^n(x,t), v_3^n(t)$ равномерно ограничены в норме пространства

$$H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}) \times H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T}) \times C_1[0,T],$$

а для функции $u^n(t)$ выполняются неравенства $0 \leq u^n(t) \leq u_0 = const,$ для п.в. $t \in [0,T],$ то повторяя элементы доказательства теоремы 1, можно показать, что $u^n(t) \to u^0(t),$ слабо в $L_2(0,T),$ $v_i^n(x,t) \to v_i^0(x,t)$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$, $i = 1,2,$ $v_3^n(t) \to v_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$ при $n \to \infty$. Поэтому

$$f(v_2^n) \to f(v_2^0),\ \int_0^t \int_0^1 v_2^n(x,\tau)dxd\tau \to \int_0^t \int_0^1 v_2^0(x,\tau)dxd\tau,\ v_1^n f(v_2^n) \to v_1^0 f(v_2^0)$$

при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^T v_1^n(1,t)dt = \int\limits_0^T v_1^0(1,t)dt.$$

Вернемся к неравенству (19):

$$\int_0^T v_1^n(1,t)dt + A_n \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le m.$$

Отсюда следует

$$A_n \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le m.$$

Следовательно

$$\int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le \frac{m}{A_n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поскольку $\Phi_1(v_2^n(x,t)) \ge 0$ для всех $(x,t) \in \overline{Q_T}$, $n \in N$, то из последнего неравенства следует

$$\int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \to 0, \tag{22}$$

при $n \to \infty$. Поскольку $v_2^n(x,t) \to v_2^0(x,t)$ по норме $C^{2,1}(\overline{Q_T})$, то

$$\int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \to \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt \tag{23}$$

при $n \to \infty$. Поэтому из (22)-(23) имеем

$$\int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt = 0. \tag{24}$$

Отсюда, поскольку $\Phi_1(v_2^0(x,t)) \ge 0$, то в силу работы [15] имеем $\Phi_1(v_2^0(x,t)) = 0$ п.в. на $\overline{Q_T}$. Функция $\Phi(v_2^0(x,t))$ непрерывна на $\overline{Q_T}$, поэтому

$$\Phi_1(v_2^0(x,t)) \equiv 0, \tag{25}$$

для $(x,t) \in \overline{Q_T}$.

Если допустить противное, т.е. считать, что существует точка $B(x_0,t_0) \in \overline{Q_T}$, в которой

$$\Phi_1(v_2^0(x_0,t_0)) > 0, \tag{26}$$

то в силу непрерывности $\Phi_1(v_2^0(x,t))$ существует окрестность $O_\epsilon(B)$ точки B, в которой окажется, что $\Phi_1(v_2(x,t)) > 0$. Но тогда получим $\int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^0(x,t))dxdt > 0$ т.е. нарушается равенство (24). Следовательно, предположение (26) неверно, поэтому выполняется тождество (25). Но это означает, что

$$v_2^0(x,t) \le v_2^*$$

для всех $(x,t) \in \overline{Q_T}$ т.е. выполняется условие (7).

Таким образом, на рассматриваемой последовательности оптимальных управлений $\{u^n(t)\}$ предел соответствующей последовательности решений $\{v_1^n, v_2^n, v_3^n\}$ системы (1)-(3) удовлетворяет неравенству (7), при этом

$$\lim_{n\to\infty} J_{A_n,1}(u^n) = \lim_{n\to\infty} (J(u^n) + A_n \int_0^T \int_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt) = m_1, \tag{27}$$

где $J_{A_n,1}(u^n) \to m_1$, возрастая. Поэтому

$$J_{A_n,1}(u^n) = J(u^n) + A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt \le m_1. \tag{28}$$

Лемма 1. Если в условиях задачи 2 числам A_n и A_{n+1} соответствуют оптимальные управления $u^n(t)$, $u^{n+1}(t) \in U_\partial$, причем $A_n < A_{n+1}$, то $J(u^n) \le J(u^{n+1})$.

Утверждение леммы 1 непосредственно следует из свойства 1, приведенного в конце параграфа.

Из леммы 1 следует, что последовательность $\{J(u^n)\}$ является возрастающей и ограниченной сверху числом m . Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} J(u^n) = m_2,$$

где $m_2 \le m$. Если считать, что $m_2 < m$, то имеем противоречие с первоначальным допущением, что

$$\min_{u\in U_\partial} J(u) = m,$$

поскольку

$$\lim_{n\to\infty} v_2^n(x,t) = v_2^0(x,t) \le v_2^*.$$

Следовательно, здесь будет случай равенства $m_2 = m$.

Учитывая неравенство (28), имеем $m_2 \le m_1$. Упорядочивая все числа m_1, m_2, m в виде неравенств, имеем $m = m_2 \le m_1 \le m$. Следовательно $m = m_1 = m_2$.

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty}[A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt] = \lim_{n\to\infty}[J_{A_n,1}(u^n) - J(u^n)] = 0$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}[A_n \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^n(x,t))dxdt)] = 0.$$

Факт принадлежности $u^0(t) \in U_\partial$ доказывается, как и в случае теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Приведем некоторые свойства слагаемых функционала (8). Для этого введем обозначение $\gamma = \frac{1}{A}$, при $A > 0$. Тогда $\gamma > 0$ и $\gamma \to 0$ при $A \to \infty$. Теперь функционал (8), с учетом обозначения функционала (5), примет вид

$$J_{\frac{1}{\gamma},1}(u) = J(u) + \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt,$$

или отсюда

$$\gamma J_{\frac{1}{\gamma},1}(u) = \gamma J(u) + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt. \tag{29}$$

Обозначим $I(u,\gamma) = \gamma J_{\frac{1}{\gamma},1}(u)$. Теперь функционал (29) запишется в виде

$$I(u,\gamma) = \gamma J(u) + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2(x,t))dxdt.$$

Рассмотрим числа A_1, A_2 , удовлетворяющие неравенствам $0 < A_1 < A_2$. Тогда здесь имеем $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, где $\gamma_i = \frac{1}{A_i}, i = 1,2$. Пусть оптимальные процессы v_1^i, v_2^i, v_3^i, u^i соответствуют числам $A_i, i = 1,2.$

Свойство 1. Если $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, то $J(u^1) \le J(u^2)$.

Доказательство. Имеют место следующие неравенства:

$$\gamma_1 J(u^1) + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt \le \gamma_1 J(u^2) + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt,$$

$$\gamma_2 J(u^2) + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt \le \gamma_2 J(u^1) + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt. \quad (30)$$

Складывая последние два неравенства, получим $(\gamma_1 - \gamma_2)(J(u^1) - J(u^2)) \le 0$. Следовательно $J(u^1) \le J(u^2)$. Свойство 1 доказано.

Таким образом, из свойства 1 следует, что $J(u^1) \le J(u^2)$ при $A_1 < A_2$.

Свойство 2. Если $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$, то $\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt \ge \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt.$

Доказательство. Неравенство (30) запишем в следующем виде:

$$\gamma_2[J(u^2) - J(u^1)] \le \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt.$$

Отсюда в силу свойства 1 имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt \ge 0.$$

Свойство 2 доказано.

Из свойства 2 следует, что

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^2(x,t))dxdt \le \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \Phi_1(v_2^1(x,t))dxdt$$

при $A_1 < A_2$.

Список литературы

1 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. -Москва: Наука, 1961.

2 Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений //Журн. вычисл. математики и мат. физики.1965. Т.5, №3. с.395–453.

3 Фиако А., Мак - Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. -Москва: Мир, 1972.

4 Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. -Москва: Наука, 1980.

5 Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. -Новосибирск: Наука, 1981.

6 Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. -Москва: Мир, 1972.

7 Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. -Москва: Наука, 1981.

8 Мусабеков К.С. Метод штрафных функций в одной задаче оптимального управления с фазовым ограничением //Вестник Новосибирского гос ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. -2013. -Т.13. -Вып. 2. -С. 86-98.

9 Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors //Chemical Engineering Sience. -1977. -Vol. 32. №11. -P. 1359–1387.

10 Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. -Москва: Наука, 1967.

11 Белоносов В.С., Зеленяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. -Новосибирск: НГУ, 1975.

12 Мусабеков К.С. Теоремы существования решения в одной задаче оптимального управления химическим реактором // Управляемые процессы и оптимизация. Управляемые системы. Новосибирск. -1982. -Вып. 22. -С. 30–50.

13 Мусабеков К.С. Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением //Вестник Новосибирского гос ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. -2010. -Т.10. -Вып. 2. -С. 54–67.
14 Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. -Москва: Мир, 1979.
15 Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. -Москва: Наука, 1974.

К.С. Мусабеков

Ш.Уәлиханов атындағы Көкшетау университеті, Абай көш., 76, Көкшетау, 020000, Қазақстан

Химиялық реактордағы тиімді басқару есебіндегі айыптық функциялар әдісі

Аннотация: Жұмыста химиялық технологияда қолданатын адиабатты емес құбырлы реактордағы процесті тиімді басқару мәселесі қарастырылған. Реакторға бірінші ретті экзотермиялық реакцияға түсетін газ беріледі. Реактордың сыртқы қабығы - қаптамасы бар. Қаптама арқылы реакторды салқындататын сұйықтық ағады. Өз кезегінде реактор қаптамадағы температураны өзгертеді.

Басқару функциясы ретінде қаптамаға берілген салқындатқыш сұйықтықтың жылдамдығы алынады. Қаптамаға берілетін сұйықтықтың температурасы тұрақты. Сондықтан басқару функциясы тек уақытқа тәуелді.

Реактор температурасының мәндері, әрекеттесуші қоспаның концентрациясы реактордың ұзақтығы мен реакция уақыты бойынша өзгереді. Реактордың математикалық моделі дербес туындылардағы дифференциялдық теңдеулерден және сәйкес шекаралық шарттармен, бастапқы шарттардан тұрады. Бұл жағдайда реактордағы температураға және басқару функциясына тиісті шектеулер қойылады. Реактордағы температураны шектеу мақсаттық функцияға қосылғыш ретінде сызықтық кесік түрінің айыптық функциясын енгізу арқылы есепке алынады. Математикалық бағдарламалаудағы айыппұлдық функциясының бұл түрі әдетте шектеудің дәл орындалуына әкеледі. Басқару функциясына шектеулер теңсіздіктер түрінде беріледі.

Мақсатты функция ретінде реактордың шығысындағы белгілі бір уақыт аралығында әрекеттеспеген заттардың жалпы мөлшері алынады. Жоғарыда айтылғандай, мақсатты функцияға айыптық функциясы қосылады. Басқарудың мақсаты - осы функцияны азайту.

Бұл жұмыста мұндай есепте тиімді басқарудың болуы туралы теорема дәлелденген. Дәлелдеу барысында гельдерлік нормадағы дербес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің шектілігі қолданылады. Бұл үздіксіз функциялар жиынының Арцельдің компактылық критерийін қолдануға мүмкіндік береді. Дәлелдеу барысында сонымен қатар $L_2(0,T)$ кеңістігіндегі басқару функциялар жиыннының әлсіз компактылығы пайдаланылады. Айыппұл коэффициентінің шектеусіз өсуіне байланысты айыптық функциясының нөлге ұмтылуы дәлелденді, яғни реактордағы температураның күйлік шектеулігі орындалатындығы көрсетілген. Келесіде қажет болатын, мақсаттық функция қосылғышының кейбір қасиеттері келтірілген.

Түйін сөздер: химиялық реактор, математикалық модель, тиімді басқару, Понтрягиннің максимум принципі, тиімді басқарудың бар болуы, айыптық функция.

K.S. Mussabekov

Ualikhanov University, 76,Abay str., Kokshetau, 020000, Kazakhstan

Method of Penalty Functions in One Problem of Optimal Control of a Process In a Chemical Reactor

Abstract: The paper considered the problem of optimal control of a process in a nonadiabatic tubular reactor used in chemical technology. Gas feeds the reactor that undergoes a first order exothermic reaction. The reactor has an outer jacket - casing. Through the casing flows reactor coolant liquid. In turn, the reactor changes the temperature in the casing. As a control function, the coolant supply rate to the casing is taken. The liquid supplied to the casing has a constant temperature. So the control function depends only on time. The values of the reactor temperature, the concentration of the reacting mixture vary along the length of the reactor and the reaction time. The mathematical model of the reactor consists of differential equations in partial derivatives and the corresponding boundary, initial conditions. In this case, appropriate restrictions are imposed on the temperature in the reactor and on the control function. The restriction on the temperature in the reactor is taken into account by introducing in the objective functional (as a term) a penalty function of the type of a linear cutoff. This type of penalty function in mathematical programming is usually driven to meet the constraints exactly. Constraints on the control function are given in the form of inequalities. As the target functional, the total amount of unreacted substance at the reactor outlet for a fixed period of time is taken. As noted above, a penalty function is added to the objective functional. The aim of the control is to minimize this functional.

The paper proves a theorem on the existence of an optimal control in such a problem. In the course of the proof, the boundedness of solutions of the system of partial differential equations in the H?lder norms is used. This allows us to use Arzel's criterion on the compactness of a set of continuous functions. The proof also uses the weak compactness sets of control functions in the space $L_2(0,T)$. With an unlimited increase in the penalty coefficient, the convergence to zero of the penalty function is proved, i.e. the feasibility, in the limit, of the phase limitation on the temperature in the reactor is shown. We also obtain some properties of the terms of the objective functional, which will be necessary in what follows.

Keywords: mathematical model, chemical reactor, optimal control, Potryagin's maximum principle, the existence of optimal control, penalty function.

References

1 Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Matematicheskaya teoriya optimal'nyh processov [Mathematical theory of optimal processes]. (Science, Moscow, 1961).

2 Dubovitsky A.Ya., Milyutin A.A. Zadachi na ekstremum pri nalichii ogranichenij [Extremum problems in the presence of restrictions], Journal of Comput. mathematics and mathematical Physics. 1965. Vol. 5. №3. P. 395-453.
3 Fiaco A., Mac-Cormick G. Nelinejnoe programmirovanie. Metody posledovatel'noj bezuslovnoj minimizacii [Nonlinear programming. Methods of sequential unconditional minimization]. (Mir, Moscow, 1972).
4 Vasiliev F.P. CHislennye metody resheniya ekstremal'nyh zadach [Numerical methods for solving extremal problems]. (Science, Moscow, 1980).
5 Grossman K., Kaplan A.A. Nelinejnoe programmirovanie na osnove bezuslovnoj minimizacii [Nonlinear programming based on unconstrained minimization]. (Nauka, Novosibirsk, 1981).
6 Lyons J.L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems described by partial differential equations]. (Mir, Moscow, 1972).
7 Vasiliev F.P. Metody resheniya ekstremal'nyh zadach [Methods for solving extremal problems]. (Science, Moscow, 1981).
8 Musabekov K.S. Metod shtrafnyh funkcij v odnoj zadache optimal'nogo upravleniya s fazovym ogranicheniem [The method of penalty functions in one optimal control problem with a phase constraint], Bulletin of the Novosibirsk State University. Series: Mathematics, mechanics, computer science. 2013. T.13. Vol. 2. P. 86-98.
9 Georgakis C., Aris R., Amundson N.R. Studies in the control of Tubular Reactors, Chemical Engineering Sience. 1977. Vol. 32. №11. P. 1359-1387.
10 Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. Linejnye I kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of parabolic type]. (Science, Moskov, 1967).
11 Belonosov V.S., Zelenyak T.I. Nelokal'nye problemy v teorii kvazilinejnyh parabolicheskih uravnenij [Nonlocal problems in the theory of quasilinear parabolic equations]. (NSU, Novosibirsk, 1975).
12 Musabekov K.S. Teoremy sushchestvovaniya resheniya v odnoj zadache optimal'nogo upravleniya himicheskim reaktorom [Existence theorems for a solution in one problem of optimal control of a chemical reactor], Controlled processes and optimization. Managed systems. Novosibirsk. 1982. Vol. 22. P. 30-50.
13 Musabekov K.S. Sushchestvovanie optimal'nogo upravleniya v odnoj regulyarizovannoj zadache s fazovym ogranicheniem [The existence of optimal control in one regularized problem with a phase constraint], Bulletin of the Novosibirsk State University. Series: Mathematics, mechanics, computer science. 2010. Vol. 10. №2. P. 54–67.
14 Riess F., Szekefalvi-Nagy B. Lectures on functional analysis [Lectures on functional analysis]. (Mir, Moscow, 1979).
15 Nathanson I.P. Theory of functions of a real variable [Theory of functions of a real variable]. (Science, Moscow, 1974).

Авторлар туралы мәліметтер:

Мусабеков Калимулла Султанович – к.ф.-м.н., ассоциированный профессор кафедры Физики, математики и информатики, НАО "Кокшетауский университет имени Ш. Уалиханова", ул. Абая, д. 76, Кокшетау, Казахстан.

Mussabekov Kalimulla – cand. of phys.-math, sci., assoc. prof., Ualikhanov University, 76, Abay str., Kokshetau, 020000, Kazakhstan

Поступила в редакцию 12.09.2022