

ISSN 2616-7182
eISSN 2663-1326

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің
ХАБАРШЫСЫ

BULLETIN
of L.N. Gumilyov Eurasian
National University

ВЕСТНИК
Евразийского национального
университета имени Л.Н. Гумилева

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Серия **МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА**

№2(139)/2022

1995 жылдан бастап шығады

Founded in 1995

Издается с 1995 года

Жылына 4 рет шығады

Published 4 times a year

Выходит 4 раза в год

Нұр-Сұлтан, 2022
Nur-Sultan, 2022
Нур-Султан, 2022

БАС РЕДАКТОРЫ

Темірғалиев Н., ф.-м.ғ.д., проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Жұбанышева А.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Бас редактордың орынбасары

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Редакция алқасы

Абакумов Е.В.

Алексеева Л.А.

*PhD, проф., Париж-Эст университеті, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР БҰҒМ Математика және математикалық модельдеу
институты, Алматы, Қазақстан*

Алимхан Қилан

Балтаева У.

Бекжан Турдыбек

Бекенов М.И.

Гогинава У.

PhD, проф., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

ф.-м.ғ.д., Мамун Хорезм академиясы, Хорезм, Өзбекстан

PhD, проф., ҚХР Шыңжаң университеті, Шыңжаң, КНР

ф.-м.ғ.к., доцент, Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

*ф.-м.ғ.д., проф., Ив. Джавахишвили Тбилиси мемлекеттік университеті,
Тбилиси, Грузия*

Голубов Б.И.

*ф.-м.ғ.д., проф., Мәскеу физика-техника институты (мемлекеттік университет)
Долгопрудный, Ресей*

Зунг Динь

*ф.-м.ғ.д., проф., Информатикалық технологиялар институты, Вьетнам
ұлттық университеті, Ханой, Вьетнам*

Иванов В.И.

Иосевич А.

Кобельков Г.М.

ф.-м.ғ.д., проф., Тула мемлекеттік университеті, Тула, Ресей

PhD, проф., Рочестер университеті, Нью-Йорк, АҚШ

*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университеті,
Мәскеу, Ресей*

Курина Г.А.

Марков В.В.

ф.-м.ғ.д., проф., Воронеж мемлекеттік университеті, Воронеж, Ресей

*ф.-м.ғ.д., проф., РҒА В.А. Стеклов атындағы Мәскеу мемлекеттік
институты, Мәскеу, Ресей*

Мейрманов А.М.

Омарбекова А.С.

Смелянский Р.Л.

ф.-м.ғ.д., проф., Сулейман Демирель атындағы Университет, Алматы, Қазақстан

т.ғ.к., Л.Н. Гумилев ат. ЕҰУ, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

*ф.-м.ғ.д., проф., М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік
университеті, Мәскеу, Ресей*

Умирбаев У.У.

Холщевникова Н.Н.

ф.-м.ғ.д., проф., Уейна мемлекеттік университеті, Детройт, АҚШ

*ф.-м.ғ.д., проф., "Станкин" Мәскеу мемлекеттік техникалық
университеті, Мәскеу, Ресей*

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. докторы, проф., Фридрих-Шиллер университеті, Йена, Германия

Редакцияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Сәтпаев к-сі, 2, 402 бөлме.

Тел: +7 (7172) 709-500 (ішкі 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Жауапты редактор: А.Ж. Жұбанышева

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы.

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРЛІК ҒЫЛЫМДАР. МЕХАНИКА сериясы

Меншіктенуші: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті.

Мерзімділігі: жылына 4 рет.

Қазақстан Республикасы Ақпарат және қоғамдық даму министрлігімен тіркелген. 02.02.2021 ж.

№ KZ65VPY00031936 қайта есепке қою туралы куәлігі.

Типографияның мекенжайы: 010008, Қазақстан, Нұр-Сұлтан қ., Қажымұқан к-сі ,12/1,

тел: +7 (7172)709-500 (ішкі 31-410).

EDITOR-IN-CHIEF

Nurlan Temirgaliyev

Prof., Doctor of Phys.-Math. Sciences, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Aksaule Zhubanysheva

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Deputy Editor-in-Chief

Nurlan Nauryzbayev

PhD, L.N.Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Editorial board:

Evgueni Abakumov

*PhD, Prof., University Paris-Est, Marne-la-Vallee
Paris, France*

Lyudmila Alexeyeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling Ministry of Education
and Science Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan*

Alexander Iosevich

PhD, Prof., University of Rochester, New York, USA

Alimhan Keylan

PhD, Prof., L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Umida Baltaeva

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Khorezm Mamun Academy, Khorezm,
Uzbekistan*

Bekzhan Turdybek

PhD, Prof., Shenzhen University, SZU, Chinese

Makhsut Bekenov

Candidate of Phys.-Math. Sci., Assoc.Prof.

L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Ushangi Goginava

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.

Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

Boris Golubov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow Institute of Physics and
Technology (State University)*

Dolgoprudnyi, Russia

Dũng Dinh

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Information Technology Institute,
Vietnam National University, Hanoi, Vietnam*

Valerii Ivanov

Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Tula State University, Tula, Russia

Georgii Kobel'kov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Galina Kurina

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Voronezh State University, Voronezh,
Russia*

Vladimir Markov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical
Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Anvarbek Meirmanov

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Suleyman Demirel University,
Almaty, Kazakhstan*

Asel Omarbekova

Cand. of Tech. Sci., L.N. Gumilyov ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan

Ruslan Smelyansky

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russia*

Ualbay Umirbaev

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof.,
Wayne State University, Detroit, USA*

Natalya Kholshchevnikova

*Doctor of Phys.-Math. Sci., Prof., Moscow State
Technological University "Stankin", Moscow, Russia*

Hans-Juergen Schmeisser

*Dr. habil., Prof., Friedrich-Schiller University
Jena, Germany*

Editorial address: 2, Satpayev str., of. 402, Nur-Sultan, Kazakhstan, 010008.

Tel.: +7 (7172) 709-500 (ext. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Responsible Editor-in-Chief: Aksaule Zhubanysheva

Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University.

MATHEMATICS. COMPUTER SCIENCE. MECHANICS Series

Owner: L.N. Gumilyov Eurasian National University. Periodicity: 4 times a year.

Registered by the Ministry of Information and Social Development of the Republic of Kazakhstan. Rediscount certificate № KZ65VPY00031936 dated 02.02.2021.

Address of printing house: 12/1 Kazhimukan str., Nur-Sultan, Kazakhstan 010008; tel: +7 (7172) 709-500 (ext.31-410).

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Темиргалиев Н., д.ф.-м.н., проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Зам. главного редактора

Жубанышева А.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Зам. главного редактора

Наурызбаев Н.Ж.

PhD, ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Редакционная коллегия

Абакумов Е.В.

PhD, проф., Университет Париж-Эст, Марн-Ла-Вале, Париж, Франция

Алексеева Л.А.

д.ф.-м.н., проф., Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Алимхан Килан

PhD, проф., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Бекжан Турдыбек

PhD, проф., Шыңжаңский университет КНР, Шыңжаң, КНР

Балтаева У.

д.ф.-м.н., Хорезмская академия Маъмуна, Хорезм, Узбекистан

Бекенов М.

к.ф.-м.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Гогинава У.

д.ф.-м.н., проф., Тбилисский государственный университет имени Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия

Голубов Б.И.

д.ф.-м.н., проф., Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия

Зунг Динь

д.ф.-м.н., проф., Институт информационных технологий, Вьетнамский национальный университет, Ханой, Вьетнам

Иванов В.И.

д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, Тула, Россия

Иосевич А.

PhD, проф., Рочестерский университет, Нью-Йорк, США

Кобельков Г.М.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Курина Г.А.

д.ф.-м.н., проф., Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Марков В.В.

д.ф.-м.н., проф., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Мейрманов А.М.

д.ф.-м.н., проф., Университет имени Сулеймана Демиреля, Алматы, Казахстан

Омарбекова А.С.

к.т.н., ЕНУ имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

Смелянский Р.Л.

д.ф.-м.н., проф., МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

Умирбаев У.У.

д.ф.-м.н., проф., Государственный университет Уейна, Детройт, США

Холщевникова Н.Н.

д.ф.-м.н., проф., Московский государственный технологический университет "Станкин", Москва, Россия

Шмайссер Ханс-Юрген

Хабилит. доктор, проф., Университет Фридрих-Шиллера, Йена, Германия

Адрес редакции: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Сатпаева, 2, каб. 402

Тел: +7 (7172) 709-500 (вн. 31-410). E-mail: vest_math@enu.kz

Ответственный редактор: А.Ж. Жубанышева

Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева.

Серия МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ. МЕХАНИКА

Собственник: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева.

Периодичность: 4 раза в год.

Зарегистрировано Министерством информации и общественного развития Республики Казахстан.

Свидетельство о постановке на переучет № KZ65VPY00031936 от 02.02.2021 г.

Адрес типографии: 010008, Казахстан, г. Нур-Султан, ул. Кажымукана, 12/1, тел.: +7 (7172)709-500 (вн.31-410).

МРНТИ: 27.17.19

К.Е. Шерниязов

*Казахский национальный университет имени Ал-Фараби, пр. аль-Фараби, 71/23,
Алматы, Казахстан
(E-mail: ksh10@gmail.com)*

Оптимальные методы приближенного восстановления функций и решений уравнений в частных производных вычислительными агрегатами по линейным комбинациям сеток Коробова со сверхсжатием информации и смежные вопросы

Аннотация: Удивительным примером сверхсжатия информации являются сетки узлов (точек в Евклидовом пространстве произвольной размерности) Н.М. Коробова, которые определяются двумя целыми положительными числами, одно из которых количество узлов. Как оказалось, квадратурные формулы с равными весами и этими сетками узлов почти оптимальны в задаче численного интегрирования, тогда как в задачах восстановления функций по крайней мере в квадрат раз хуже неулучшаемо возможного.

Тем самым, на возникаемый принципиальный вопрос "*Можно ли, если можно, то как в задачах восстановления использовать предельно высокие качества сеток Коробова*", автором был получен положительный ответ в задачах восстановления функций и преобразований их кратных тригонометрических рядов Фурье, в частности, содержащих решения уравнений в частных производных, в сложных в Вычислительной математике, Численном анализе и Теории приближений классах функций с доминирующими смешанными производной и разностью. Именно, были построены сетки, явным образом представляющие собой линейные комбинации исходных сеток Коробова, что в вычислительной практике сохраняют свойства их сверхсжатия.

В процессе решения этих задач были получены самостоятельного значения различные результаты в дискретной математике, по качеству заложенных в них приложений, быть может, даже не меньше с их помощью достигнутого. Если к числу известных с большим спектром применений относятся характеристические функции одномерных решеток, то автором в Евклидовых пространствах любой размерности для произвольных решеток, с целочисленными невырожденными задающими матрицами построены их характеристические функции.

Еще одним результатом в этом ряду являются явные решения сравнений, возникающих во многих задачах дискретной математики, среди которых находятся Линейные конгруэнтные генераторы построения случайных чисел по тестам Ковэю-Макферсона, при всех усилиях в Компьютерных науках не поддававшиеся решению в течение почти полувека, ход поисков которых постоянно освещался во всех изданиях монографии "Искусство программирования" Дональда Кнута, входящей в список 12-ти высших публикаций физико-математического цикла в 20-ом веке, с закрытием проблемы в 2016 году Н. Темиргалиевым.

Однако все эти результаты, и далеко не только, входившие в защищенную в 1999 году Кандидатскую диссертацию автора были лишь частично анонсированы в тезисах Внутриказахстанских конференций и в Кратких сообщениях, самое большее с изложением схем доказательств.

Тем самым, все результаты Диссертации оказались вне внимания в Международной математике, что с полными доказательствами восстанавливается в данной статье.

Ключевые слова: восстановление функций, восстановление решений уравнений в частных производных, операторы восстановления, характеристическая функция целочисленной решетки, сетки Коробова, сверхсжатие информации.

2000 Mathematics Subject Classification: 42A15, 65T40.

Введение. Данная статья посвящена Теории восстановления функций и решений уравнений в частных производных для классов Коробова E , Соболева с доминирующей смешанной производной SW и Никольского-Бесова B .

Современному состоянию этих тем исследований посвящены статьи Б.С. Кашина, Е. Косова, И. Лимоновой, В.Н. Темлякова [1] и В.Н. Темлякова, Т. Ульриха [2], монография В.Н.Темлякова «Многомерные аппроксимации» [3], а также библиографические ссылки в них соответственно в 177, 33 и 251 публикациях.

Вместе с тем, во многом совершенно другие результаты из [4] составляют Научную программу Института Теоретической Математики и Научных Вычислений (ИТМиНВ) Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева, которые также отражают современное состояние в 24-х Направлениях и Темах, поскольку в [1]- [3] нет формулировок и ссылок на них.

Результаты данной статьи в обзорном порядке освещены в [4]- [9], однако, по-видимому, неизвестны вне Казахстана. Так, например, в [1, 28 с.] приводится равенство

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{\frac{ik2\pi l}{2n+1}} = \begin{cases} 2n + 1, & k = 0, \\ 0, & 0 < |k| < 2n \end{cases}$$

– характеристическая функция равномерной решетки на действительной прямой, на основе которой определены широко применяющиеся в вычислительной практике квадратурные формулы с равномерной сеткой узлов и равными весами, оптимальные в классах Соболева, Никольского-Бесова и им аналогичных. Еще одним следствием этого равенства является Метод быстрого преобразования Фурье (БПФ) Кули и Тьюки с неограниченным спектром применений, названной БПФ-манией.

Вместе с тем, для любой решетки в Евклидовом пространстве любой размерности s имеет место утверждение:

Пусть дано целое положительное число s и пусть $\Lambda \subset Z^s$ есть полная решетка в R^s , заданная произвольной невырожденной целочисленной $s \times s$ матрицей A

$$\Lambda = \{u \cdot A : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\}.$$

Тогда для каждого m из Z^s имеет место равенство

$$\chi_{\Lambda}(m) = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(m, k(A^{-1})')\},$$

где величина $\chi_{\Lambda}(m)$ равна нулю или единице смотря по тому, принадлежит или нет вектор m решетке Λ .

В частности, для задающей решетку Λ треугольной матрицы V , диагональные элементы которой $v_{jj} > 0 (j = 1, 2, \dots, s)$, справедливо равенство

$$\chi_{\Lambda}(m) = \frac{1}{\det V} \sum_{\substack{k \in Z^s: -v_{jj}/2 \leq k_j < v_{jj}/2 \\ (j=1,2,\dots,s)}} \exp\{2\pi i(m, k(V^{-1})')\}$$

при всех $m \in Z^s$, о чем, во всяком случае в [1]- [3], не сообщается.

Далее нам понадобятся следующие определения классов.

Классы Лебега. Пусть $E \subset R^s$ – измеримое множество. Тогда в класс $L^p(E)$ относят все измеримые на E функции f такие, что конечны следующие нормы

1) Если $1 \leq p < \infty$, то $\|f\|_p \equiv \|f\|_{L^p(E)} = (\int_E |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$;

2) Если $p = \infty$, то под $L^\infty(E)$ понимается либо пространство равномерно непрерывных на E функций f и тогда

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(E)} = \sup_{x \in E} |f(x)|,$$

либо пространство существенно ограниченных на E функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \text{vrai sup}_{x \in E} |f(x)|.$$

Под классом $L^{p,\infty} \equiv L^{p,\infty}((0,1)^s \times [0,+\infty))$ будем понимать множество всех функций $g(x,t)$ таких, что для каждого $t \in [0,+\infty)$ функция $g_t(x) = g(x,t)$ как функция аргумента $x \in R^s$ является измеримой периодической с периодом 1 по каждой из своих s переменных суммируемых функций и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{p,\infty}} = \text{vrai sup}_{t \geq 0} \left(\int_{[0,1]^s} |g(x,t)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Класс Коробова $E_s^r (r > 1, s = 1, 2, \dots)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье которых удовлетворяют неравенству

$$|\hat{f}(m)| = \left| \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx \right| \leq \left(\prod_{j=1}^s \max\{1; |m_j|\} \right)^{-r}.$$

Класс Соболева $SW^r(0,1)^s (s = 1, 2, \dots; r > 0; 1 \leq q \leq \infty)$ есть множество всех функций $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$, представимых в виде

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^s \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq s \\ j_k \in Z(k=1, 2, \dots, n)}} \int_{[0,1]^n} \varphi_{j_1, j_2, \dots, j_n}(y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_n}) \prod_{k=1}^n F_r(x_{j_k} - y_{j_k}) dy_{j_1} \dots dy_{j_n},$$

где

$$F_r(t) = \sum_{m \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{e^{-\frac{\pi r i}{2} \text{sgn} m}}{(2\pi \|m\|)^r} e^{2\pi i m t}, \quad \|\varphi_{j_1, j_2, \dots, j_n}(\cdot)\|_{L^p(0,1)^n} \leq 1, \quad |c| \leq 1.$$

Класс Никольского-Бесова $B_{q,\theta}^r(0,1)^s (s = 1, 2, \dots; r > 0, 1 \leq q, \theta \leq \infty)$ состоит из всех 1-периодических по каждой из своих переменных функций $f(x)$ таких, что справедливы неравенства

1) Если $1 \leq \theta < \infty$, то

$$\|f\|_{B_{q,\theta}^r} \equiv \|f\|_{L^q(0,1)^s} + \left(\int_{R^s} |u|^{-s-\theta r} \left\| \Delta_u^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_{L^q(0,1)^s} du \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1,$$

2) Если $\theta = \infty$, то

$$\|f\|_{B_{q,\theta}^r} \equiv \|f\|_{L^q(0,1)^s} + \sup_{u \in R^s} \left\{ |u|^{-r} \left\| \Delta_u^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_{L^q(0,1)^s} \right\} \leq 1,$$

здесь $[r]$ – целая часть r , для вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in R^s$ $|u| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_s^2}$ и $\Delta_u^{[r]+2} f(x) = \sum_{l=0}^{[r]+2} (-1)^{[r]+2-l} C_{[r]+2}^l f(x + lu)$.

В [3, 15 с.] сообщается о решающей роли сеток Смоляка в задачах восстановления, тогда как не сообщается, что по соответствующим образом составленными из сеток Коробова, со свойством сверхсжатия информации, сеткам решаются те же вопросы с качеством точности в степенной шкале для изучаемых классов E и SW . Следует отметить, что весьма эффективные в вопросах численного интегрирования сетки Коробова оказались неэффективными в вопросах восстановления (см. [10]). Эта ситуация аналогична

многочленам Лагранжа, которые сами по себе предельно плохи в вопросах интерполяции, но применяемые в виде сплайнов оптимальны в ряде случаев [11].

Полученные операторы восстановления даны с точностью до значений оптимальных коэффициентов. Эта задача решена в [16]- [20], где даны оптимальные алгоритмы их вычисления. Эти алгоритмы приобретают еще большую ценность по той причине, что не зависят от каких-либо свойств восстанавливаемых функций и, тем самым, не обладают свойством насыщения и автоматически дают степень приближения, заложенные в оптимальных оценках по показателям гладкости.

Решающую роль в Спектральном критерии Линейного конгруэнтного метода – Linear congruential generator (LCG), полностью решенного Н. Темиргалиевым [12] [13], играет (см. [14, 120 с.] и [15, 113 с.]

Пусть даны целое положительное число s и целые числа $p \geq 2, a_1 = 1, a_2, \dots, a_s$, и пусть

$$V_{p,a_2,\dots,a_s} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_s & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для всякого вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s$, удовлетворяющего соотношению

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}, \tag{1}$$

найдется вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s такой, что

$$m = u V_{p,a_2,\dots,a_s}, \tag{2}$$

причем для каждого m из Z^s , удовлетворяющего (1), такой вектор u единственен.

2. Обратно, при любом $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s вектор

$$m = u V_{p,a_2,\dots,a_s}$$

удовлетворяет соотношению (1).

Иными словами, равенство (2) определяет взаимно однозначное соответствие между множеством векторов $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющих соотношению (1), и решеткой с задающей матрицей V_{p,a_2,\dots,a_s} , где новым является часть 2) окончания части 1).

Здесь ограничимся этими тремя примерами, фактически все утверждения статьи обладают такой же новизной, среди которых неожиданное, что совершенно различные и эффективные в Вычислительной математике сетки Н.М. Коробова и сетки К.К. Фролова задаются в виде $k(A^{-1})'$, где A треугольная целочисленная матрица.

Результаты данной статьи впервые анонсированы в [24], частично опубликованы с краткими доказательствами в [25]- [26] и составляют основное содержание Кандидатской диссертации [27], защищенной 26-го января 1999 года.

Результаты статьи выполнены в формате КВП-1, поэтому перед автором стоит задача доведения до уровня полных КВП-исследований по требованиям [9].

Глава 1. Приближенное восстановление функций из классов E , SW и по их значениям в заданном числе точек.

1.1. Необходимые определения и вспомогательные утверждения.

1.1.1. Определение оптимальных коэффициентов и их свойства. В данном подразделе будут приведены в удобном для наших целей виде ряд известных результатов (в основном из [10]), касающиеся оптимальных коэффициентов.

Приведем определение оптимальных коэффициентов. Пусть s и p - целые положительные числа, $a_1(p), a_2(p), \dots, a_s(p)$ - целые числа, взаимно простые с p и величина $\chi_p(\zeta)$ равна единице или нулю, смотря по тому, делится число ζ на p или нет.

Если существуют константы $\gamma(s)$ и $c_0(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполнено

$$\sum_{m \in Z^s \setminus \{0\}: \max_j |m_j| < p/2} \frac{\chi_p(a_1(p)m_1 + a_2(p)m_2 + \dots + a_s(p)m_s)}{\overline{m}} \leq c_0(s) \frac{\ln^{\gamma(s)} p}{p}, \quad (1.1.1.1)$$

то для каждого p , принадлежащего указанной последовательности, целые числа $a_1(p), a_2(p), \dots, a_s(p)$ называют оптимальными коэффициентами по модулю p , а константу $\gamma(s)$ - их индексом, где здесь и всюду ниже для $m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s$ положено $\overline{m} = \overline{m}_1 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s$ и $\overline{m}_j = \max\{1, |m_j|\} (j = 1, 2, \dots, s)$ (см. [10, 96 стр.]).

Лемма 1.1.1.1 (Коробов Н.М. [10, с. 120-121]). Пусть s - целое положительное число. Тогда существует положительная константа $c_0(s)$ такая, что для всякого простого числа $p > 2$ найдутся целые $a_1(p) = 1, a_2(p), \dots, a_s(p)$ такие, что

$$\sum_{m \in Z^s \setminus \{0\}: \max_j |m_j| < p/2} \frac{\chi_p(a_1(p)m_1 + a_2(p)m_2 + \dots + a_s(p)m_s)}{\overline{m}} \leq c_0(s) \frac{\ln^s p}{p}.$$

Иными словами, для всякого $p > 2$ из последовательности простых чисел существуют оптимальные коэффициенты $a_1(p) = 1, a_2(p), \dots, a_s(p)$ индекса s .

Лемма 1.1.1.2 (Коробов Н.М. [10, с. 98-101]). Пусть даны целое положительное s и вещественное $\alpha > 1$, и пусть для всякого p из некоторой последовательности целых положительных чисел целые $a_1(p), a_2(p), \dots, a_s(p)$ - есть оптимальные коэффициенты по модулю p индекса $\gamma(s)$. Тогда существует положительная константа $c(s, \alpha)$ такая, что для всякого p из указанной последовательности выполняется неравенство

$$\sum_{m \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{\chi_p(a_1(p)m_1 + a_2(p)m_2 + \dots + a_s(p)m_s)}{(\overline{m})^\alpha} \leq c(\alpha, s) \frac{\ln^{\alpha\gamma(s)} p}{p^\alpha}.$$

Лемма 1.1.1.3 (Коробов Н.М. [10, с. 107]). Пусть s -целое положительное число, целые $a_1(p), a_2(p), \dots, a_s(p)$ - оптимальные коэффициенты по модулю $p, \gamma(s)$ их индекс и $c_0(s)$ - константа указанная в определении (1.1.1.1). Тогда для всякого ненулевого вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющего соотношению

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1.1.1.2)$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1 \cdot \overline{m}_2 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s > \frac{p}{c_0(s) \ln^{\gamma(s)} p}.$$

Лемма 1.1.1.4 (Коробов Н.М. [10, с.123]). Пусть заданы целые числа $p > 1, a_1, a_2, \dots, a_s$ и положительное число p такие, что для всякого ненулевого вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющего соотношению

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p},$$

выполняется неравенство

$$\overline{m} \equiv \overline{m}_1 \overline{m}_2 \cdot \dots \cdot \overline{m}_s \geq q.$$

Тогда при любых целых λ, λ_j и $\mu_j \geq 1 (j = 1, 2, \dots, s)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+\mu_1} \dots \sum_{m_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+\mu_s} \chi_p(a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s + \lambda) &\leq \\ &\leq \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_s \leq q, \\ \frac{4\mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_s}{q} & \text{при } \mu_1 \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_s > q. \end{cases} \end{aligned}$$

1.1.2. Решетки: определения и некоторые известные утверждения.

Пусть s -целое положительное число. Пусть $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)} (k \leq s)$ - линейно независимая система векторов евклидова пространства R^s . Совокупность Λ всех векторов вида

$$u_1 a^{(1)} + u_2 a^{(2)} + \dots + u_k a^{(k)},$$

где u_j независимо друг от друга пробегают все целые числа, называется k -мерной решеткой в R^s , а сами векторы $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$ - базисом этой решетки. Если $k = s$, то решетка называется *полной*, в противном случае *неполной* (см. [8]).

Пусть Λ и M есть решетки в R^s . Если каждая точка решетки Λ является также точкой решетки M , то Λ называется *подрешеткой* решетки M .

Далее, пусть Λ, M - есть решетки в R^s и пусть $\Lambda \subset M$, т.е. Λ есть подрешетка решетки M . Говорят, что два элемента x и y из M *эквивалентны*, если их разность $x - y$ принадлежит Λ . Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, т.е. определяет разбиение решетки M на классы, состоящие из эквивалентных элементов M . Эти классы называются *классами решетки M относительно подрешетки Λ* (см. [10, с. 21-30] и [28, с. 144]). Всякую систему векторов $K(\Lambda, M)$, состоящую из элементов M и содержащую ровно один элемент из каждого класса решетки M относительно подрешетки Λ назовем *полной системой представителей классов решетки M относительно подрешетки Λ* . Отсюда следует, что если $K(\Lambda, M)$ - некоторая полная система представителей классов решетки M относительно подрешетки Λ , то имеет место разложение

$$M = \bigcup_{k \in K(\Lambda, M)} \{k + x : x \in \Lambda\} \tag{1.1.2.1}$$

Лемма 1.1.2.1 (Дж. Касселс [29, с. 22]). Пусть Λ и M полные решетки в R^s и Λ есть подрешетка решетки M . Тогда:

1) для любого базиса $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(s)}$ решетки M можно так выбрать базис $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s)}$ решетки Λ , что

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= v_{11}b^{(1)} \\ a^{(2)} &= v_{21}b^{(1)} + v_{22}b^{(2)} \\ &\dots \\ a^{(s)} &= v_{s1}b^{(1)} + v_{s2}b^{(2)} + \dots + v_{ss}b^{(s)}, \end{aligned} \tag{1.1.2.2}$$

где v_{ij} - целые числа, $v_{jj} > 0$ для всех j .

2) обратно, для любого базиса $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s)}$ решетки Λ найдется такой базис $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(s)}$ решетки M , что имеет место (1.1.2.2).

Пусть Λ - есть k -мерная решетка с базисом

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1s}) \\ a^{(2)} &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2s}) \\ &\dots \\ a^{(k)} &= (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{ks}). \end{aligned} \tag{1.1.2.3}$$

Тогда всякий элемент

$$u_1 a^{(1)} + u_2 a^{(2)} + \dots + u_k a^{(k)} (u_j \in Z)$$

решетки Λ можно представить в виде

$$uA,$$

где

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_k),$$

а матрица

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1s} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{ks} \end{pmatrix}, \tag{1.1.2.4}$$

иными словами,

$$\Lambda = \{uA : u \in Z^k\}. \tag{1.1.2.5}$$

Обратно, для всякой матрицы A порядка $k \times s$ с независимой системой строк (1.1.2.3), множество Λ , определяемое равенством (1.1.2.5), является k -мерной решеткой в R^s и система (1.1.2.3) является ее базисом.

Матрицу A назовем *задающей матрицей решетки Λ* или, точнее, *задающей матрицей решетки Λ , соответствующей базису* (1.1.2.3).

Известно, что базис решетки определен неоднозначно (см., напр., [29, с.20-30]). Всякая пара базисов одной и той же решетки связаны между собой унимодулярным преобразованием (напомним, что унимодулярным преобразованием называется преобразование с целочисленной квадратной матрицей, определитель которой равен ± 1). Следовательно, задающая матрица решетки также определена неоднозначно.

Таким образом, между базисами решетки и ее задающими матрицами существуют взаимно однозначное соответствие.

Доказательства следующих лемм не требует особых усилий и содержатся, напр., в [29, с.20-30].

Лемма 1.1.2.2. Пусть Λ есть полная решетка в R^s . Тогда для всяких матриц A_1 и A_2 , задающих одну и ту же решетку Λ , имеет место равенство

$$|\det A_1| = |\det A_2|.$$

Лемма 1.1.2.3. Пусть Λ и M полные решетки в R^s и пусть Λ есть подрешетка решетки M . Тогда число классов решетки M относительно подрешетки Λ равно

$$\left| \frac{\det A}{\det B} \right|,$$

где A и B - произвольные задающие матрицы решеток Λ и M соответственно.

1.2. Основные леммы. В данном разделе сформулируем и доказываем основные леммы, на базе которых будут доказаны основные результаты работы.

Пусть s - целое положительное число. Очевидно, что множество Z^s является полной решеткой в R^s . Всюду ниже будем рассматривать подрешетки решетки Z^s .

Лемма 1.2.1. Пусть s - целое положительное число и пусть Λ есть k -мерная подрешетка решетки Z^s . Тогда всякая задающая матрица A решетки Λ является целочисленной матрицей порядка $k \times s$ с линейно независимыми строками.

Эта лемма сразу же следует из определения задающей матрицы (см. п.1.1.2).

Лемма 1.2.2. Пусть s целое положительное число и пусть $\Lambda \subset Z^s$ полная решетка в R^s . Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Найдется треугольная матрица

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & \dots & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{s1} & v_{s2} & v_{s3} & \dots & v_{ss} \end{pmatrix}, \quad (1.2.1)$$

где v_{ij} - целые числа и $v_{jj} > 0$, такая, что

$$\Lambda = \{u \cdot V : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\}. \quad (1.2.2)$$

Иными словами, всякая полная подрешетка решетки Z^s задается треугольной целочисленной матрицей.

2. Система векторов.

$$K = \{k = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in Z^s : -v_{jj}/2 \leq k_j < v_{jj}/2 (j = 1, 2, \dots, s)\}, \quad (1.2.3)$$

где v_{jj} - есть диагональные элементы матрицы (1.2.1), является полной системой представителей классов решетки Z^s как относительно подрешетки, Λ , так и относительно подрешетки

$$\Lambda' = \{u \cdot V' : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\},$$

где V' есть матрица, полученная транспонированием V .

Доказательство. Первое утверждение данной леммы является прямым следствием леммы 1.1.2.1. Действительно, рассматривая в лемме 1.1.2.1 в качестве решетки M решетку Z^s и в качестве ее базиса систему векторов

$$b^{(1)} = (1, 0, 0, \dots, 0), b^{(2)} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, b^{(s)} = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

закключаем, что существуют целые

$$\begin{matrix} v_{11} \\ v_{21} & v_{22} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{s1} & v_{s2} & v_{s3} & v_{ss} \end{matrix}$$

такие, что система векторов

$$\begin{aligned} a^{(1)} &\equiv v_{11}b^{(1)} = (v_{11}, 0, 0, \dots, 0) \\ a^{(2)} &\equiv v_{21}b^{(1)} + v_{22}b^{(2)} = (v_{12}, v_{22}, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ a^{(s)} &\equiv v_{s1}b^{(1)} + v_{s2}b^{(2)} + \dots + v_{ss}b^{(s)} = (v_{s1}, v_{s2}, v_{s3}, \dots, v_{ss}), \end{aligned}$$

является базисом решетки Λ . Тогда соответствующей этому базису задающей матрицей решетки Λ будет матрица

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & \dots & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ v_{s1} & v_{s2} & v_{s3} & \dots & v_{ss} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\Lambda = \{u \cdot V : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\}.$$

Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Сначала докажем, что различные элементы системы (1.2.3) принадлежат различным классам решетки Z^s относительно подрешетки Λ . Пусть $k^{(1)} = (k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_s^{(1)})$ и $k^{(2)} = (k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_s^{(2)})$ элементы системы (1.2.3), принадлежащие одному классу решетки Z^s относительно подрешетки Λ . Это означает, что $k^{(1)} - k^{(2)} \in \Lambda$. Тогда в силу (1.2.2) найдется вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s такой, что

$$k^{(1)} - k^{(2)} = uV. \tag{1.2.4}$$

Запишем последнее равенство покоординатно:

$$\begin{cases} lk_1^{(1)} - k_1^{(2)} = u_1v_{11} + u_2v_{21} + u_3v_{31} \dots + u_s v_{s1}, \\ k_2^{(1)} - k_2^{(2)} = u_2v_{22} + u_3v_{32} \dots + u_s v_{s2}, \\ \dots \\ k_s^{(1)} - k_s^{(2)} = u_s v_{ss}. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Но,

$$\left| k_s^{(1)} - k_s^{(2)} \right| < v_{ss},$$

ибо

$$\begin{aligned} -v_{ss}/2 &\leq k_s^{(1)} < v_{ss}/2, \\ -v_{ss}/2 &\leq k_s^{(2)} < v_{ss}/2. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что u_s - целое, из последнего равенства в (1.2.5) получим

$$u_s = 0. \tag{1.2.6}$$

Подставляя последнее в систему (1.2.5) получим систему

$$\begin{cases} k_1^{(1)} - k_1^{(2)} &= u_1 v_{11} + u_2 v_{21} + u_3 v_{31} + \dots + u_{s-1} v_{s-11} \\ k_2^{(1)} - k_2^{(2)} &= u_2 v_{22} + u_3 v_{32} + \dots + u_{s-1} v_{s-12} \\ &\dots \\ k_{s-1}^{(1)} - k_{s-1}^{(2)} &= u_{s-1} v_{s-1s-1} \end{cases}$$

Повторяя те же рассуждения, что и при получении равенства (1.2.6), из последнего равенства последней системы получим равенство

$$u_{s-1} = 0.$$

Продолжая далее обнаружим

$$u_s = 0, u_{s-1} = 0, u_{s-2} = 0, \dots, u_1 = 0.$$

Тогда из (1.2.5) следует, что

$$k^{(1)} = k^{(2)}.$$

Таким образом, предполагая, что элементы $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ системы (1.2.3) принадлежат одному классу решетки Z^s относительно подрешетки Λ получили равенство $k^{(1)} = k^{(2)}$. Это означает, что различные элементы системы принадлежат различным классам решетки Z^s относительно подрешетки Λ .

Далее покажем, что количество элементов системы (1.2.3) совпадает с количеством всех классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ . Действительно, с одной стороны, количество элементов системы (1.2.3) равно $v_{11} v_{22} \cdot \dots \cdot v_{ss} = \det V$, ибо для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ в интервале $[-\frac{v_{jj}}{2}, \frac{v_{jj}}{2})$ имеется v_{jj} целых чисел. С другой стороны, поскольку единичная матрица E_{ss} является задающей матрицей для решетки Z^s , то в силу леммы 1.1.2.3 число классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ равно

$$\frac{\det V}{\det E_{ss}} = \det V,$$

т.е. действительно равно количеству элементов системы (1.2.3).

Тем самым показали, что, во-первых, различные элементы системы (1.2.3) принадлежат различным классам решетки Z^s относительно подрешетки Λ , во-вторых, количество элементов системы (1.2.3) совпадает с количеством классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ . Отсюда следует, что система (1.2.3), будучи подмножеством Z^s , содержит ровно по одному элементу из каждого класса решетки Z^s относительно подрешетки Λ , т.е. по определению является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ .

То, что система (1.2.3) является также полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ' доказывается совершенно аналогично с той лишь разницей, что вместо равенства (1.2.4) рассматривается равенство

$$k^{(1)} - k^{(2)} = uV',$$

где V' - есть матрица, полученная транспонированием матрицы V . Лемма 1.2.2 полностью доказана.

Лемма 1.2.3. Пусть дано целое положительное число s и пусть $\Lambda \subset Z^s$ есть полная решетка в R^s . Тогда для всякой задающей матрицы A решетки Λ , т.е. такой, что

$$\Lambda = \{u \cdot A : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\}, \quad (1.2.7)$$

и для каждого m из Z^s имеет место равенство

$$\chi_\Lambda(m) = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(m, k(A^{-1})')\}, \quad (1.2.8)$$

где величина $\chi_\Lambda(m)$ равна нулю или единице смотря по тому, принадлежит или нет вектор $m \in Z^s$ решетке Λ , а система векторов $K \subset Z^s$ есть некоторая полная система представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки

$$\Lambda' = \{u \cdot A' : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\}. \quad (1.2.9)$$

В частности, для задающей решетку Λ треугольной матрицы V , диагональные элементы которой $v_{jj} > 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$), справедливо

$$\chi_\Lambda(m) = \frac{1}{\det V} \sum_{\substack{k \in Z^s: -v_{jj}i \leq k_j < v_{jj}/2 \\ (j=1,2,\dots,s)}} \exp\{2\pi i(m, k(V^{-1})')\} \quad (1.2.10)$$

при всех $m \in Z^s$.

Доказательство. Пусть A произвольная фиксированная задающая матрица решетки Λ , т.е. такая, что для нее выполняется (1.2.7), и пусть Λ' есть решетка с задающей матрицей A' , т.е. такая, что для нее выполняется (1.2.9). Так как Λ есть полная решетка в R^s и $\Lambda \subset Z^s$, то матрица A будет невырожденной и целочисленной матрицей порядка $s \times s$ (см. лемму 1.2.1). Далее, в силу леммы 1.1.2.3 число классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ' равен $\det A'$. Учитывая все эти факты, сначала докажем, что сумма в правой части (1.2.8) не зависит от K , т.е. от того, по какой полной системе представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ' производится суммирование.

Действительно, пусть $K = \{k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\det A)}\} \subset Z^s$ и $T = \{t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(\det A)}\} \subset Z^s$ две различные полные системы представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки Λ' . Тогда, в силу определения полной системы представителей классов, между элементами множеств T и K можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы соответствующие элементы принадлежали одному классу решетки Z^s относительно подрешетки Λ' . Другими словами, найдутся перестановка $\{j_1, j_2, \dots, j_{\det A}\}$ упорядоченного множества $\{1, 2, \dots, \det A\}$ и система векторов $\{m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(\det A)}\} \subset Z^s$ такие, что для каждого $n = 1, 2, \dots, \det A$ имеет место $k^{(n)} = t^{(j_n)} + m^{(n)}A'$. Тогда при произвольном фиксированном m из Z^s имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} e^{2\pi i(m, k(A^{-1})')} &= \sum_{n=1}^{\det A} e^{2\pi i(m, k^{(n)}(A^{-1})')} = \\ &= \sum_{n=1}^{\det A} e^{2\pi i(m, (t^{(j_n)} + m^{(n)}A')(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{\det A} e^{2\pi i(m, t^{(j_n)}(A^{-1})')} e^{2\pi i(m, m^{(n)}A'(A^{-1})')}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая

$$\exp\{2\pi i(m, m^{(n)}A'(A^{-1})')\} = \exp\{2\pi i(m, m^{(n)}E_{ss})\} = 1,$$

где E_{ss} есть единичная матрица порядка $s \times s$, получим

$$\sum_{k \in K} e^{2\pi i(m, k(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{\det A} e^{2\pi i(m, t^{(j_n)}(A^{-1})')} = \sum_{n=1}^{\det A} e^{2\pi i(m, t^{(n)}(A^{-1})')}.$$

Итак, сумма в правой части (1.2.8) действительно не зависит от того, по какой полной системе представителей классов K производится суммирование.

Приступим к доказательству равенства (1.2.8). Пусть сначала $m \in \Lambda$. Тогда в силу (1.2.7) найдется вектор $u \in Z^s$ такой, что $m = uA$. Подставляя это в правую часть (1.2.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(m, k(A^{-1})')\} &= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(uA, k(A^{-1})')\} = \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(uAA^{-1}, k)\} = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} \exp\{2\pi i(u, k)\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} 1 = \frac{1}{\det A} \text{card} K = \frac{1}{\det A} \cdot \det A' = 1.$$

Это доказывает справедливость (1.2.8) для всех $m \in \Lambda$.

Пусть теперь $m \notin \Lambda$. Тогда опять же в силу (1.2.7) заключаем, что не все компоненты вектора $u = mA^{-1}$ целые. Пусть одно из нецелых будет j_0 -я компонента u_{j_0} и пусть $e^{(0)} \in Z^s$ есть вектор, j_0 -ая компонента которого равна 1, а остальные равны 0. Рассмотрим систему векторов $K^{(0)} \equiv \{k + e^{(0)} : k \in K\}$. Покажем, что эта система также является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно Λ' . Для этого сначала докажем, что справедливы следующие утверждения:

- 1) число элементов системы $K^{(0)}$ равно числу классов решетки Z^s относительно Λ' ;
- 2) различные элементы множества $K^{(0)}$ принадлежат различным классам решетки Z^s относительно Λ' .

Справедливость первого утверждения очевидна, поскольку в системе $K^{(0)}$ столько элементов, сколько в системе K .

Допустим, что второе утверждение неверно. Тогда найдутся различные элементы $k^{(1)}$ и $k^{(2)}$ из K такие, что элементы $k^{(1)} + e^{(0)}$ и $k^{(2)} + e^{(0)}$ системы $K^{(0)}$ принадлежат одному классу решетки Z^s относительно Λ' . Это означает, что имеет место

$$(k^{(1)} + e^{(0)}) - (k^{(2)} + e^{(0)}) \in \Lambda',$$

или, что то же самое,

$$k^{(1)} - k^{(2)} \in \Lambda'.$$

Но последнее противоречит тому, что K есть полная система представителей решетки Z^s относительно Λ' . Тем самым справедливость утверждений 1)-2) доказаны. Из этих утверждений следует, что система $K^{(0)}$, будучи подмножеством Z^s , содержит ровно по одному элементу из каждого класса решетки Z^s относительно Λ' , т.е. действительно является полной системой представителей классов решетки относительно Λ' .

Отсюда, учитывая тот факт, что сумма в правой части (1.2.8) не зависит от системы K , получим

$$\begin{aligned} S &\equiv \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} e^{2\pi i(m, k(A^{-1}))'} = \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K^{(0)}} e^{2\pi i(m, k(A^{-1}))'} = \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_{k \in K} e^{2\pi i(m, (k+e^{(0)})(A^{-1}))'} = S \cdot e^{2\pi i(m, e^{(0)}(A^{-1}))'}. \end{aligned}$$

Но $e^{2\pi i(m, e^{(0)}(A^{-1}))'} = e^{2\pi i(mA^{-1}, e^{(0)})} = e^{2\pi i(u, e^{(0)})} = e^{2\pi i u_{j_0}} \neq 1$, ибо u_{j_0} нецелое, поэтому $S = 0$. Стало быть, (1.2.8) справедливо и при $m \notin \Lambda$. Лемма 1.2.3 доказана.

Лемма 1.2.4. Пусть даны целое положительное число s , ограниченная числовая последовательность $\beta = \{\beta_m : m \in Z^s\}$, конечное множество индексов $\mathfrak{S} = \{\tau\}$, попарно непересекающиеся множества $\rho_\tau \subset Z^s$ ($\tau \in \mathfrak{S}$), целочисленные квадратные невырожденные матрицы A_τ ($\tau \in \mathfrak{S}$) порядка $s \times s$, и пусть для каждого $\tau \in \mathfrak{S}$ система векторов K_τ есть некоторая полная система представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки

$$\Lambda'_\tau = \{uA'_\tau : u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s\}.$$

Тогда для всякой 1-периодической по каждой переменной и разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} &u(x, \beta, f) - (T_{\rho, \beta, A} f)(x) = \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_\tau + m) \right) \beta_m e^{2\pi i(m, x)} + \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in \mathfrak{S}} \rho_\tau} \beta_m \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)}, \quad (1.2.11) \end{aligned}$$

где $\hat{f}(m)$ ($m \in Z^s$) — есть коэффициенты Фурье функции f по тригоно-метрической системе $\{e^{2\pi i(m, x)} : m \in Z^s\}$, функция $u(x, \beta, f)$ и оператор $T_{\rho, \beta, A}$ определены

соответственно равенствами

$$u(x, \beta, f) = \sum_{m \in Z^s} \beta_m \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)} (x \in R^s) \quad (1.2.12)$$

и

$$(T_{\rho, \beta, A} f)(x) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} f(\{k(A_\tau^{-1})'\}) \sum_{m \in \rho_\tau} \beta_m e^{2\pi i(m, x - \{k(A_\tau^{-1})'\})}. \quad (1.2.13)$$

В частности, для произвольного тригонометрического полинома

$$f(x) = \sum_{m \in E} c_m e^{2\pi i(m, x)}$$

такого, что

$$E \subset \left(Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in \mathfrak{S}} \bigcup_{m \in \rho_\tau} \{uA_\tau + m : u \in Z^s \setminus \{0\}\} \right) \cap \bigcup_{\tau \in \mathfrak{S}} \rho_\tau,$$

имеет место равенство (интерполяционная формула)

$$u(x, \beta, f) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} f(\{k(A_\tau^{-1})'\}) \sum_{m \in \rho_\tau} \beta_m e^{2\pi i(m, x - k(A_\tau^{-1})')}.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье, т.е.

$$f(x) = \sum_{l \in Z^s} \hat{f}(l) e^{2\pi i(l, x)} (x \in R^s). \quad (1.2.14)$$

Преобразуем правую часть равенства (1.2.13) следующим образом:

$$\begin{aligned} (T_{\rho, \beta, A} f)(x) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} f(\{k(A_\tau^{-1})'\}) \sum_{m \in \rho_\tau} \beta_m e^{2\pi i(m, x - \{k(A_\tau^{-1})'\})} = \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} f(\{k(A_\tau^{-1})'\}) e^{-2\pi i(m, \{k(A_\tau^{-1})'\})} \right) \beta_m e^{2\pi i(m, x)}. \end{aligned}$$

Далее, представив каждое значение $f(\{k(A_\tau^{-1})'\})$ в виде $\sum_{l \in Z^s} \hat{f}(l) e^{2\pi i(l, \{k(A_\tau^{-1})'\})}$ (см.(1.2.14)), получим

$$\begin{aligned} &(T_{\rho, \beta, A} f)(x) = \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} \sum_{l \in Z^s} \hat{f}(l) e^{2\pi i(l, \{k(A_\tau^{-1})'\})} e^{-2\pi i(m, \{k(A_\tau^{-1})'\})} \right) \beta_m e^{2\pi i(m, x)} = \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} \sum_{l \in Z^s} \hat{f}(l) e^{2\pi i(l - m, \{k(A_\tau^{-1})'\})} \right) \beta_m e^{2\pi i(m, x)}, \end{aligned}$$

откуда, сначала делая замену $n = l - m$ в сумме по l , затем меняя местами суммы по k и по n (это возможно в силу абсолютной сходимости ряда в (1.2.14)), получим

$$\begin{aligned} (T_{\rho, \beta, A} f)(x) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} \sum_{n \in Z^s} \hat{f}(n + m) e^{2\pi i(n, \{k(A_\tau^{-1})'\})} \right) \beta_m e^{2\pi i(m, x)} = \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\sum_{n \in Z^s} \hat{f}(n + m) \left\{ \frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} e^{2\pi i(n, \{k(A_\tau^{-1})'\})} \right\} \right) \beta_m e^{2\pi i(m, x)}. \quad (1.2.15) \end{aligned}$$

Но, в силу леммы 1.2.3 при каждом $\tau \in \mathfrak{S}$ для всякого $n \in Z^s$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} e^{2\pi i(n, \{k(A_\tau^{-1})'\})} = \frac{1}{\det A_\tau} \sum_{k \in K_\tau} e^{2\pi i(n, k(A_\tau^{-1})')} = \chi_{\Lambda_\tau}(n),$$

где χ_{Λ_τ} — есть характеристическая функция решетки $\Lambda_\tau = \{uA_\tau : u \in Z^s\}$. Так что (1.2.15) можно записать в виде

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\sum_{n \in Z^s} \hat{f}(n+m) \chi_{\Lambda_\tau}(n) \right) \beta_m e^{2\pi i(m,x)},$$

или, что то же самое, в виде

$$(T_{\rho,\beta,A}f)(x) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\sum_{u \in Z^s} \hat{f}(uA_\tau + m) \right) \beta_m e^{2\pi i(m,x)}.$$

Преобразуя далее получим

$$\begin{aligned} (T_{\rho,\beta,A}f)(x) &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_\tau + m) \right) \beta_m e^{2\pi i(m,x)} + \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \hat{f}(m) \beta_m e^{2\pi i(m,x)} = \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}} \sum_{m \in \rho_\tau} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_\tau + m) \right) \beta_m e^{2\pi i(m,x)} + \sum_{m \notin \bigcup_{\tau \in \mathfrak{S}} \rho_\tau} \hat{f}(m) \beta_m e^{2\pi i(m,x)}. \end{aligned}$$

В итоге, из последнего равенства и из (1.2.12) следует равенство (1.2.11). Лемма 1.2.4 доказана.

Лемма 1.2.5. Пусть даны целое положительное число s и целые числа $p \geq 2, a_1 = 1, a_2, \dots, a_s$, и пусть

$$V_{p,a_2,\dots,a_s} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_s & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для всякого вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s$, удовлетворяющего соотношению

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}, \quad (1.2.16)$$

найдется вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s такой, что

$$m = uV_{p,a_2,\dots,a_s}, \quad (1.2.17)$$

причем для каждого m из Z^s , удовлетворяющего (1.2.16), такой вектор u единственен.

2. Обратное, при любом $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s вектор

$$m = uV_{p,a_2,\dots,a_s}$$

удовлетворяет соотношению (1.2.16).

Иными словами, равенство (1.2.17) определяет взаимно однозначное соответствие между множеством векторов $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющих соотношению (1.2.16), и решеткой с задающей матрицей V_{p,a_2,\dots,a_s} .

Доказательство. Пусть вектор $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s удовлетворяет соотношению (1.2.16). Это означает, что найдется целое u_1 такое, что

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s = p u_1.$$

Тогда для вектора

$$u = (u_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s$$

имеем

$$\begin{aligned} & u V_{p, a_2, \dots, a_s} = \\ & = (u_1, m_2, m_3, \dots, m_s) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_s & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\ & = (p_1 u_1 - a_2 m_2 - a_3 m_3 - \dots - a_s m_s, m_2, m_3, \dots, m_s) = m, \end{aligned}$$

т. е. действительно, для каждого вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющего соотношению (1.2.16), найдется вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s такой, что $m = u V_{p, a_2, \dots, a_s}$. Единственность такого вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s для каждого $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющего (1.2.16), следует из обратимости матрицы V_{p, a_2, \dots, a_s} .

Докажем вторую часть леммы. Пусть вектор $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s представимо в виде (1.2.16), т.е. найдется вектор $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s такой, что

$$\begin{aligned} m = u V_{p, a_2, \dots, a_s} & = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_s) \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_s & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\ & = (p_1 u_1 - a_2 u_2 - a_3 u_3 - \dots - a_s u_s, u_2, u_3, \dots, s). \end{aligned}$$

Тогда

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s = (p_1 u_1 - a_2 u_2 - a_3 u_3 - \dots - a_s u_s) + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_s u_s = p u_1,$$

т.е. $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ удовлетворяет соотношению

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}.$$

Лемма 1.2.5 полностью доказана.

Лемма 1.2.6. Пусть заданы целые числа $p > 1, a_1 = 1, a_2, \dots, a_s$ и положительное число q такие, что для всякого ненулевого вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s , удовлетворяющего соотношению

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p},$$

выполняется неравенство

$$\overline{m} \equiv \overline{m_1} \overline{m_2} \dots \overline{m_s} \geq q.$$

Пусть

$$V_{p, a_2, \dots, a_s} \equiv \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_s & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда при любых целых λ_j и $\mu_j \geq 1 (j = 1, 2, \dots, s)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \text{card}\{u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s : u V_{p, a_2, \dots, a_s} \in [\lambda_1 + 1, \lambda_1 + \mu_1] \times \dots \times [\lambda_s + 1, \lambda_s + \mu_s]\} \leq \\ & \leq \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_1 \mu_2 \dots \mu_s \leq q, \\ \frac{4 \mu_1 \mu_2 \dots \mu_s}{q} & \text{при } \mu_1 \mu_2 \dots \mu_s > q, \end{cases} \end{aligned}$$

где для множества E через $\text{card}E$ обозначено количество его элементов.

Доказательство. В силу утверждения 2 леммы 1.2.5 для всякого $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ из Z^s вектор

$$m = uV_{p,a_2,\dots,a_s}$$

удовлетворяет соотношению

$$m_1 + a_2m_2 + \dots + a_sm_s \equiv 0(\text{mod } p),$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{card}\{u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s : uV_{p,a_2,\dots,a_s} \in [\lambda_1 + 1, \lambda_1 + \mu_1] \times \dots \times [\lambda_s + 1, \lambda_s + \mu_s]\} &\leq \\ &\leq \sum_{m_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+\mu_1} \dots \sum_{m_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+\mu_s} \chi_p(a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_sm_s), \end{aligned}$$

где, напомним, $\chi_p(\cdot)$ - есть характеристическая функция множества целых чисел, кратных p .

С другой стороны, в силу леммы 1.1.4

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+\mu_1} \dots \sum_{m_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+\mu_s} \chi_p(a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_sm_s) &\leq \\ &\leq \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_1\mu_2 \dots \mu_s \leq q, \\ \frac{4n_1n_2 \dots n_s}{q} & \text{при } \mu_1\mu_2 \dots \mu_s > q. \end{cases} \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует утверждение леммы 1.2.6.

Лемма 1.2.7. Пусть ς целое положительное число. Тогда для любого целого n и для целого k такого, что

$$2^{\varsigma-1} \leq \bar{k} < 2^\varsigma$$

выполняется

$$2^{\varsigma-1}\bar{n} \leq \overline{2^{\varsigma+1}n + k} < 2^{\varsigma+2}\bar{n},$$

где, напомним, для $y \in R$ положено $\bar{y} = \max\{1, |y|\}$.

Доказательство. Докажем оценку снизу. При $n = 0$ имеем

$$\left| 2^{\varsigma+1}n + k \right| = |k|,$$

откуда

$$\overline{2^{\varsigma+1}n + k} = \max\left\{ \left| 2^{\varsigma+1}n + k \right|, 1 \right\} = \max\{|k|, 1\} = \bar{k} \geq 2^{\varsigma-1} = 2^{\varsigma-1}\bar{n}.$$

Если же $n \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \overline{2^{\varsigma+1}n + k} &= \max\left\{ \left| 2^{\varsigma+1}n + k \right|, 1 \right\} \geq \left| 2^{\varsigma+1}n + k \right| \geq 2^{\varsigma+1}|n| - k = 2^\varsigma|n| + (2^\varsigma|n| - k) \geq \\ &\geq 2^\varsigma|n| + (2^\varsigma|n| - \bar{k}) > 2^\varsigma|n| + (2^\varsigma|n| - 2^\varsigma) \geq 2^\varsigma|n| = 2^\varsigma\bar{n} > 2^{\varsigma-1}\bar{n}. \end{aligned}$$

Оценка снизу доказана.

Докажем оценку сверху. Для любого целого n и для всякого целого k такого, что

$$2^{\varsigma-1} \leq \bar{k} < 2^\varsigma$$

имеем

$$\left| 2^{\varsigma+1}n + k \right| \leq 2^{\varsigma+1}|n| + |k| < 2^{\varsigma+1}|n| + 2^\varsigma < 2^{\varsigma+2}\bar{n},$$

откуда

$$\overline{2^{\varsigma+1}n + k} = \max\left\{ \left| 2^{\varsigma+1}n + k \right|, 1 \right\} < 2^{\varsigma+2}\bar{n}.$$

Лемма 1.2.7 полностью доказана.

Лемма 1.2.8. Пусть даны целое положительное число s и бесконечно дифференцируемая на R ненулевая функция $\omega(t)$ такая, что

$$\{t \in R : \omega(t) \neq 0\} \subset (0, 1), \tag{1.2.18}$$

и пусть для всяких $N > 1$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N - 1)$ функция $\omega_{N,\mu}(t)$ есть 1-периодическая функция, определенная равенством

$$\omega_{N,\mu}(t) = \omega(Nt - \mu)(0 \leq t < 1). \quad (1.2.19)$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Для всякого числа $r > 1$ найдется константа $c_1(r, s, \omega) > 0$ такая, что при любых $N > 1$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N - 1)$ функция

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_1(r, s, \omega)}{N^{r-1}} \omega_{N,\mu}(x_1)$$

принадлежит классу E_s^r .

2. Для всякого числа $r > 0$ найдется константа $c_2(r, s, \omega) > 0$ такая, что при любых $N(N = 1, 2, 3, \dots)$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N - 1)$ функция

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_2(r, s, \omega)}{N^{r-1/2}} \omega_{N,\mu}(x_1)$$

принадлежит классу $SW_2^r(0, 1)^s$.

Доказательство. Для произвольных фиксированных $N > 1$ и $\mu(0 \leq \mu \leq N - 1)$ положим

$$g_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \omega_{N,\mu}(x_1)(x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \in R^s). \quad (1.2.20)$$

Очевидно, что функция $g_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ является 1-периодической по каждой переменной. Кроме того, из (1.2.18) и (1.2.19) следует, что

$$g_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) = 0 \text{ при } x = (x_1, x_2, \dots, x_s) \notin \left(\frac{\mu}{N}, \frac{\mu+1}{N}\right) \times (0, 1)^{s-1}. \quad (1.2.21)$$

Рассмотрим коэффициенты Фурье функции $g_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$. Сперва заметим, что для всякого $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s такого, что хотя бы один из компонент m_2, m_3, \dots, m_s будет отличен от нуля выполняется $\hat{g}_{N,\mu}(m_1, m_2, \dots, m_s) = 0$. Действительно, пусть $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ из Z^s такой, что для некоторого целого $2 \leq j_0 \leq s$ выполнено $m_{j_0} \neq 0$. Тогда (см. (1.2.20))

$$\begin{aligned} \hat{g}_{N,\mu}(m_1, m_2, \dots, m_s) &= \int_{[0,1]^s} g_{N,\mu}(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx = \int_{[0,1]^s} \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i(m,x)} dx = \\ &= \int_0^1 \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 \cdot \prod_{j=2}^s \int_0^1 e^{-2\pi i m_j x_j} dx_j = 0, \end{aligned}$$

ибо

$$\int_0^1 e^{-2\pi i m_{j_0} x_{j_0}} dx_{j_0} = 0.$$

Отсюда следует, что могут быть отличными от нуля только коэффициенты

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)(m_1 \in Z). \quad (1.2.22)$$

Далее, пусть σ произвольное целое положительное число. Учитывая (1.2.19), (1.2.20) и (1.2.21) получим

$$\begin{aligned} \hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0) &= \int_{[0,1]^s} g_{N,\mu}(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx = \int_0^1 \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 = \\ &= \int_{\frac{\mu}{N}}^{\frac{\mu+1}{N}} \omega_{N,\mu}(x_1) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1 = \int_{\frac{\mu}{N}}^{\frac{\mu+1}{N}} \omega(Nx_1 - \mu) e^{-2\pi i m_1 x_1} dx_1, \end{aligned}$$

откуда, делая замену

$$t = Nx_1 - \mu,$$

получим

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{N} \int_0^1 \omega(t) e^{-2\pi i \frac{m_1(t+\mu)}{N}} dt. \quad (1.2.23)$$

Отсюда, для $m_1 \neq 0$ применяя формулу интегрирования по частям к правой части σ раз и учитывая (1.2.18) получим

$$\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0) = \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2\pi i m_1} \right)^\sigma \int_0^1 \omega^{(\sigma)}(t) e^{-2\pi i \frac{m_1(t+\mu)}{N}} dt. \quad (1.2.24)$$

Приступаем к доказательству утверждения 1. Пусть задано $r > 1$ и пусть $N > 1$ и $\mu (0 \leq \mu \leq N - 1)$ фиксированы. Оценим сверху коэффициенты $\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0) (m_1 \in Z)$.

Пусть сначала $|m_1| \leq N$. Тогда из (1.2.23) следует, что

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)| \leq \frac{1}{N} \int_0^1 |\omega(t)| dt = \frac{N^{r-1}}{(\bar{m}_1)^r} \left(\frac{\bar{m}_1}{N} \right)^r \int_0^1 |\omega(t)| dt \leq \frac{N^{r-1}}{(\bar{m}_1)^r} \int_0^1 |\omega(t)| dt. \quad (1.2.25)$$

Пусть теперь $|m_1| > N$. Пользуясь равенством (1.2.24) при $\sigma = [r] + 1$, получим

$$\begin{aligned} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)| &\leq \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2\pi |m_1|} \right)^\sigma \int_0^1 |\omega^{(\sigma)}(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{N^{r-1}}{|m_1|^r} \left(\frac{N}{2\pi |m_1|} \right)^{\sigma-r} \int_0^1 |\omega^{(\sigma)}(t)| dt \leq \frac{N^{r-1}}{|m_1|^r} \int_0^1 |\omega^{(\sigma)}(t)| dt = \\ &= \frac{N^{r-1}}{(\bar{m}_1)^r} \int_0^1 |\omega^{([r]+1)}(t)| dt, \end{aligned}$$

т.е.

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)| \leq \frac{N^{r-1}}{(\bar{m}_1)^r} \int_0^1 |\omega^{([r]+1)}(t)| dt. \quad (1.2.26)$$

Как было замечено выше, остальные коэффициенты Фурье функции $g_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ равны нулю. Учитывая это из (1.2.25) и (1.2.26) получим, что имеет место

$$|\hat{g}_{N,\mu}(m)| \leq \frac{N^{r-1}}{(\bar{m})^r} \max \left\{ \int_0^1 |\omega(t)| dt, \int_0^1 |\omega^{([r]+1)}(t)| dt \right\} (m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s).$$

Отсюда, полагая

$$c_1(r, s, \omega) \equiv \left(\max \left\{ \int_0^1 |\omega(t)| dt, \int_0^1 |\omega^{([r]+1)}(t)| dt \right\} \right)^{-1},$$

имеем, что для коэффициентов Фурье функции $f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$, определенной равенством (см., также, (1.2.20))

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_1(r, s, \omega)}{N^{r-1}} g_{N,\mu}(x) = \frac{c_1(r, s, \omega)}{N^{r-1}} \omega_{N,\mu}(x_1),$$

справедливы неравенства

$$|\hat{f}_{N,\mu}(m)| \leq (\bar{m})^{-r} (m \in Z^s).$$

Это означает, что функция $f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ принадлежит классу E_s^r .

Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $r > 0$. Пусть $N > 1$ и $\mu (0 \leq \mu \leq N - 1)$ фиксированы. Оценим сверху сумму

$$\sum_{m_1 \in Z} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r},$$

для чего сначала разбиваем ряд на две части:

$$\begin{aligned} \sum_{m_1 \in Z} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} &= \sum_{|m_1| \leq N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} + \\ &+ \sum_{|m_1| > N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

и отдельно оцениваем каждое слагаемое.

С учетом (1.2.23) для первой суммы в правой части последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{|m_1| \leq N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} \leq \sum_{|m_1| \leq N} \left(\frac{1}{N} \int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 (\bar{m}_1)^{2r} = \\ & = \left(\frac{1}{N} \int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 \sum_{|m_1| \leq N} (\bar{m}_1)^{2r} \leq \left(\frac{1}{N} \int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 \sum_{|m_1| \leq N} N^{2r} = \\ & = \left(\frac{1}{N} \int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 N^{2r} (2N + 1) \leq 3 \left(\frac{1}{N} \int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 N^{2r+1} = 3 \left(\int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 N^{2r-1}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sum_{|m_1| \leq N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} \leq 3 \left(\int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 N^{2r-1}. \quad (1.2.28)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (1.2.27). Пользуясь равенством (1.2.24) при $\sigma = [r] + 2$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{|m_1| > N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} \leq \sum_{|m_1| > N} \left(\frac{1}{N} \left(\frac{N}{2\pi|m_1|} \right)^\sigma \int_0^1 |\omega^{(\sigma)}(t)| dt \right)^2 (|m_1|)^{2r} = \\ & = \frac{N^{2(\sigma-1)}}{(2\pi)^{2\sigma}} \left(\int_0^1 |\omega^{(\sigma)}(t)| dt \right)^2 \sum_{|m_1| > N} \frac{1}{(|m_1|)^{2(\sigma-r)}} = \\ & = \frac{N^{2([r]+1)}}{(2\pi)^{2([r]+2)}} \left(\int_0^1 |\omega^{([r]+2)}(t)| dt \right)^2 \sum_{|m_1| > N} \frac{1}{(|m_1|)^{2([r]+2-r)}}. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

Но, поскольку $2([r] + 2 - r) > 2 > 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{|m_1| > N} \frac{1}{(|m_1|)^{2([r]+2-r)}} = 2 \sum_{m_1 > N} \frac{1}{(|m_1|)^{2([r]+2-r)}} \leq 2 \int_{N-1}^\infty \frac{dx}{x^{2([r]+2-r)}} = \\ & = \frac{2}{(2([r] + 2 - r) - 1)(N - 1)^{2([r]+2-r)-1}} \leq \frac{2}{(2([r] + 2 - r) - 1) \left(\frac{N}{2}\right)^{2([r]+2-r)-1}} = \\ & = \frac{2^{2([r]+2-r)}}{(2([r] + 2 - r) - 1) N^{2([r]+1)-2r+1}}. \end{aligned}$$

Учитывая это из (1.2.29) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{|m_1| > N} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} \leq \\ & \leq \frac{2^{2([r]+2-r)}}{(2\pi)^{2([r]+2)}(2([r] + 2 - r) - 1)} \left(\int_0^1 |\omega^{([r]+2)}(t)| dt \right)^2 N^{2r-1}. \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

Таким образом, из (1.2.27), (1.2.28) и (1.2.30) получим

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_{N,\mu}(m_1, 0, \dots, 0)|^2 (\bar{m}_1)^{2r} \leq c^{-2}(r, s, \omega) N^{2r-1}, \quad (1.2.31)$$

где

$$\begin{aligned} c_2(r, s, \omega) \equiv \max \left\{ 1, \frac{2^{2([r]+2-r)}}{(2\pi)^{2([r]+2-r)}(2([r] + 2 - r) - 1)} \left(\int_0^1 |\omega^{([r]+2)}(t)| dt \right)^2, \right. \\ \left. 3 \left(\int_0^1 |\omega(t)| dt \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Определим функцию $f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$ равенством (см., также, (1.2.20))

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_2(r, s, \omega)}{N^{r-1/2}} g_{N,\mu}(x) = \frac{c_2(r, s, \omega)}{N^{r-1/2}} \omega_{N,\mu}(x_1) \quad (1.2.33)$$

и представим ее в виде свертки:

$$f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s) = \frac{c_2(r, s, \omega)}{N^{r-1/2}} \hat{g}_{N,\mu}(0, 0, \dots, 0) + \int_{[0,1]} \varphi_{N,\mu}(t_1) F_r(x_1 - t_1) dt_1,$$

где

$$F_r(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{-\frac{\pi r i}{2} \operatorname{sgn} m}}{(2\pi |m|)^r} e^{2\pi i m t}$$

и

$$\varphi_{N,\mu}(t) = c_2(r, s, \omega) \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2\pi |m|)^r e^{\frac{\pi r i}{2} \operatorname{sgn} m} \hat{g}_{N,\mu}^\wedge(m, 0, \dots, 0) e^{2\pi i m t}.$$

Из (1.2.27), (1.2.28), (1.2.30) и (1.2.31) следует, что

$$\|\varphi_{N,\mu}(\cdot)\|_{L^2(0,1)} \leq 1 \text{ и } \left| \frac{c_2(2, r, s, \omega)}{N^{r-1/2}} \hat{g}_{N,\mu}(0, 0, \dots, 0) \right| \leq 1.$$

Следовательно, функция $f_{N,\mu}(x_1, x_2, \dots, x_s)$, определенная равенством (1.2.33), принадлежит классу SW_2^r . Утверждение 2 и вместе с тем лемма 1.2.8 полностью доказано.

1.3. Оценки снизу погрешности восстановления функций из классов E_s^r и SW_2^r по их значениям в узлах равномерных и параллелепипедальных теоретико-числовых сеток

Справедлива

Теорема 1. Пусть s целое положительное число. Тогда при любом $N = n^s$ ($n = 1, 2, \dots$) имеют место следующие оценки снизу:

1) при $r > 1$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{s}(r-1+1/\nu)}} \ll \inf_{r,s,\nu} \sup_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \|f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), \cdot)\|_\nu,$$

2) при $r > 1/2$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{s}(r-(1/2-1/\nu)_+)}} \ll \inf_{r,s,\nu} \sup_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r} \|f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), \cdot)\|_\nu,$$

где в обоих соотношениях \inf_{φ_N} берется по всем функциям

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C,$$

измеримым по переменной x в смысле Лебега, а сетка $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ есть равномерная сетка ($N = n^s$ ($n = 1, 2, \dots$))

$$\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) (k_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k_j \leq n-1 (j = 1, 2, \dots, s)).$$

Доказательство теоремы 1. Сначала докажем оценку 1). Пусть $r > 1$ и $\omega(t)$ -фиксированная бесконечно дифференцируемая на R функция, удовлетворяющая условию

$$\{t : \omega(t) \neq 0\} \subset (0, 1), \tag{1.3.1}$$

и пусть $c_1(r, s, \omega) > 0$ есть константа из утверждения 1) леммы 2.8, соответствующая указанным r и $\omega(t)$.

Пусть даны произвольное целое положительное число n , измеримая в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ функция

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C (N = n^s),$$

и пусть сетка $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ ($N = n^s$) есть равномерная сетка

$$\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_s}{n}\right) (k_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq k_j \leq n-1 (j = 1, 2, \dots, s)).$$

Согласно утверждению 1) леммы 1.2.8 1-периодическая по каждой переменной функция, определенная равенством

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_1(r, s, \omega)}{n^{r-1}} \omega(nx_1) (0 \leq x_1 < 1) \quad (1.3.2)$$

принадлежит классу E_s^r . Кроме того, из (1.3.1) следует, что

$$\forall x \in [0, 1]^s \setminus \left(0, \frac{1}{n}\right) \times [0, 1]^{s-1} \Rightarrow f_\xi(x) = 0.$$

Отсюда, в частности,

$$f_\xi(\xi^{(k)}) = 0 (k = 1, 2, \dots, N). \quad (1.3.3)$$

Далее для каждого $1 \leq \nu \leq \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_\xi(x)\|_\nu &= \frac{c_1(r, s, \omega)}{n^{r-1}} \left(\int_{[0,1]^s} |\omega(nx_1)|^\nu dx \right)^{1/\nu} = \frac{c_1(r, s, \omega)}{n^{r-1}} \left(\int_0^{\frac{1}{n}} |\omega(nx_1)|^\nu dx_1 \right)^{\frac{1}{\nu}} = \\ &= \frac{c_1(r, s, \omega)}{n^{r-1}} \left(\frac{1}{n} \int_0^1 |\omega(t)|^\nu dt \right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{c_1(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{n^{r-1+\frac{1}{\nu}}} = \frac{c_1(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{N^{\frac{1}{s}(r-1+\frac{1}{\nu})}}. \end{aligned}$$

В итоге, учитывая (1.3.3) и последнее равенство получим

$$\begin{aligned} \max_{j=0,1} \left\| (-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\left\| f_\xi(x) - \varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}), f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu + \right. \\ &\quad \left. + \left\| -f_\xi(x) - \varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}), -f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, -f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\|f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu + \|f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\|f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu + \|f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu \right) = \|f_\xi(x)\|_\nu = \\ &= \frac{c_1(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{N^{\frac{1}{s}(r-1+\frac{1}{\nu})}}, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности φ_N следует утверждение 1. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем вторую часть теоремы 1. Пусть $r > 1/2$ и $\omega(t)$ -фиксированная ненулевая бесконечно дифференцируемая на R функция, удовлетворяющая условию (1.3.1), и пусть $c_2(r, s, \omega) > 0$ есть константа из утверждения 2) леммы 1.2.8, соответствующая указанным r и $\omega(t)$.

Сначала докажем оценку снизу при $\nu \geq 2$. Пусть даны произвольное целое положительное число n , измеримая в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ функция

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C (N = n^s),$$

и пусть сетка $\{\xi^{(k)}\}_1^N (N = n^s)$ есть равномерная сетка

$$\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \dots, \frac{k_s}{n} \right) (k_j \in Z, 0 \leq k_j \leq n-1 (j = 1, 2, \dots, s)).$$

В силу утверждения 2 леммы 1.2.8 заключаем, что 1-периодическая по каждой переменной функция, определенная равенством

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_2(r, s, \omega)}{n^{r-1/2}} \omega(nx_1) (0 \leq x_j < 1 (j = 1, 2, \dots, s)) \quad (1.3.4)$$

принадлежит классу $SW_2^r(0, 1)^s$.

Далее повторяя те же рассуждения, что и в доказательстве первой части теоремы 1 получим

$$\max_{j=0,1} \left\| (-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu \geq$$

$$\begin{aligned}
 & \geq \frac{1}{2} \left(\|f_\xi(x) - \varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}), f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, f_\xi(\xi^{(N)}), x)\|_\nu + \right. \\
 & \left. + \|-f_\xi(x) - \varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}), -f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, -f_\xi(\xi^{(N)}), x)\|_\nu \right) = \\
 & = \frac{1}{2} (\|f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu + \|f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu) \geq \\
 & \geq \frac{1}{2} \|(f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)) + (f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x))\|_\nu = \|f_\xi(x)\|_\nu = \\
 & = \frac{c_2(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{N^{\frac{1}{s}(r-1/2+1/\nu)}}. \tag{1.3.5}
 \end{aligned}$$

Если же $1 \leq \nu < 2$, то вместо функции (1.3.4) рассмотрим функцию

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{1}{n^r} \sin 2\pi n x_1,$$

которая, как легко проверить, также принадлежит классу $SW_2^r(0, 1)^s$. Очевидно также, что $f_\xi(\xi^{(k)}) = 0 (k = 1, 2, \dots, N)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \max_{j=0,1} \left\| (-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu \geq \\
 & \geq \frac{1}{2} \left(\|f_\xi(x) - \varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}), f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, f_\xi(\xi^{(N)}), x)\|_\nu + \right. \\
 & \left. + \|-f_\xi(x) - \varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}), -f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, -f_\xi(\xi^{(N)}), x)\|_\nu \right) = \\
 & = \frac{1}{2} (\|f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu + \|f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu) \geq \\
 & \geq \frac{1}{2} \|(f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)) + (f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x))\|_\nu = \|f_\xi(x)\|_\nu = \\
 & = \frac{1}{n^r} \left(\int_0^1 |\sin 2\pi n x_1|^\nu dx_1 \right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{n^r} \left(\int_0^1 |\sin 2\pi x_1|^\nu dx_1 \right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{\|\sin 2\pi x\|_{L^\nu(0,1)}}{N^{r/s}}.
 \end{aligned}$$

В итоге объединяя последнее с (1.3.5) для $1 \leq \nu \leq \infty$ получим

$$\sup_{f \in SW_2^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu \geq \frac{c_0(r, s, \omega)}{N^{\frac{1}{s}(r-(1/2-1/\nu)_+)}}$$

где $c_0(r, s, \omega) = \min\{c_2(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu, \|\sin 2\pi x\|_{L^\nu(0,1)}\}$. Откуда в силу произвольности φ_N следует утверждение 2 теоремы 1. Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. Пусть s целое положительное число. Тогда при любом целом положительном N имеют место следующие оценки снизу:

1) при $r > 1$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{\frac{r}{2}}} \ll \inf_{r,s,\nu} \inf_{a \in \mathbb{Z}^s} \sup_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N\left(f\left(\frac{a}{N}\right), f\left(\frac{2a}{N}\right), \dots, f\left(\frac{Na}{N}\right), \cdot\right) \right\|_\nu,$$

2) при $r > 1/2$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{\frac{r}{2}}} \ll \inf_{r,s,\nu} \inf_{a \in \mathbb{Z}^s} \sup_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \left\| f(\cdot) - \varphi_N\left(f\left(\frac{a}{N}\right), f\left(\frac{2a}{N}\right), \dots, f\left(\frac{Na}{N}\right), \cdot\right) \right\|_\nu,$$

где в обеих соотношениях \inf_{φ_N} берется по всем функциям

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C,$$

измеримым по переменной x в смысле Лебега.

Доказательство. Для доказательства используем пример-функцию, построенную Н.М. Коробовым в [10, с. 182]. Пусть заданы целое положительное число N и вектор $a = (a_1, a_2, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$. Согласно известной лемме Туэ (см., напр., [10, с. 182]) найдутся целые числа $|n_1| \leq \sqrt{N}$ и $|n_2| \leq \sqrt{N}$ такие, что

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 \equiv 0 \pmod{N}. \tag{1.3.6}$$

Положим

$$f_{N,a}(x) = \frac{e^{2\pi i n_1 x_1} - e^{-2\pi i n_2 x_2}}{2n^r},$$

где $n = \max\{n_1, n_2\}$. Очевидно, что $f_{N,a}(x)$ принадлежит классу E_s^r при $r > 1$ и классу SW_2^r при $r > 0$.

Кроме того, в силу (1.3.6)

$$f_{a,N}\left(\frac{ka}{N}\right) = \frac{e^{2\pi i \frac{n_1 a_1 k}{N}} - e^{-2\pi i \frac{n_2 a_2 k}{N}}}{n^r} = \frac{e^{2\pi i \frac{n_1 a_1 k}{N}} - e^{2\pi i \frac{n_1 a_1 k}{N}}}{n^r} = 0.$$

С учетом этого для произвольной измеримой по переменной x в смысле Лебега функции

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C$$

имеем ($1 \leq \nu \leq \infty$)

$$\begin{aligned} & \max_{j=0,1} \left\| (-1)^j f_{a,N}(x) - \varphi_N((-1)^j f_{a,N}\left(\frac{a}{N}\right), (-1)^j f_{a,N}\left(\frac{2a}{N}\right), \dots, (-1)^j f_{a,N}\left(\frac{Na}{N}\right), x) \right\|_\nu \ll \\ & \ll \frac{1}{2} \left(\left\| f_{a,N}(x) - \varphi_N\left(f_{a,N}\left(\frac{a}{N}\right), f_{a,N}\left(\frac{2a}{N}\right), \dots, f_{a,N}\left(\frac{Na}{N}\right), x\right) \right\|_\nu + \right. \\ & \left. + \left\| -f_{a,N}(x) - \varphi_N\left(-f_{a,N}\left(\frac{a}{N}\right), -f_{a,N}\left(\frac{2a}{N}\right), \dots, -f_{a,N}\left(\frac{Na}{N}\right), x\right) \right\|_\nu \right) = \\ & = \frac{1}{2} (\|f_{a,N}(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu + \|f_{a,N}(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)\|_\nu) \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \|(f_{a,N}(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)) + (f_{a,N}(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x))\|_\nu = \|f_{a,N}(x)\|_\nu \gg_{r,s,\nu} \\ & \gg_{r,s,\nu} \frac{1}{n^r} \geq \frac{1}{N^{r/2}}. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку функции $(-1)^j f_{N,a}(x) (j = 0, 1)$ принадлежат классу E_s^r при $r > 1$ и классу SW_2^r при $r > 1/2$, в силу произвольности функции

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C$$

получим, соответственно, утверждения 1 и 2 теоремы 2. Теорема 2 полностью доказана.

1.4. Доказательства основных результатов

В данном подразделе будут доказаны следующие теоремы:

Теорема 3. Пусть дано целое положительное число s . Пусть для каждого $k (k = 1, 2, \dots)$ число p_k - есть простое число, удовлетворяющее соотношению $2^{k+3} \leq p_k \cdot k^2 < 2^{k+4}$, а целые числа $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}$ - оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса $\gamma \geq 0$. Пусть для всякого целого $l \geq s + 1$ и всякого $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ из Z^s такого, что $\tau_j > 0$ и $\|\tau\| \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < l$ матрица $A_{l,\tau}$ и множества $K(l, \tau), \rho(\tau)$ определены соответственно равенствами

$$A_{l,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{l-\|\tau\|} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(l-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_3^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \dots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}, \quad (1.4.1)$$

$$K(l, \tau) = \{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{l-\|\tau\|} \leq k_1 < 2^{\tau_1} p_{l-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \leq k_j < 2^{\tau_j} (j = 2, 3, \dots, s)\} \quad (1.4.2)$$

$$\rho(\tau) = \{m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j-1} \leq \max\{1, |m_j|\} < 2^{\tau_j} (j = 1, \dots, s)\}. \quad (1.4.3)$$

Тогда при любом целом положительном $N \geq 2^{2s+5}$ имеют место следующие соотношения:

1) при $r > 1$ и $2 \leq \nu \leq \infty$

$$\sup_{f \in E_s^r} \|f(\cdot) - (T_N f)(\cdot)\|_\nu \ll_{r,s,\nu,\gamma} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1+1/\nu}},$$

2) при $r > 1/2$

$$\sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{x \in [0,1]^s} |f(x) - (T_N f)(x)| \ll_{r,s,\gamma} \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}},$$

3) при $2r > s$ и $1 \leq \theta \leq \infty$

$$\sup_{f \in B_{2,\theta}^r(0,1)^s} \sup_{x \in [0,1]^s} |f(x) - (T_N f)(x)| \ll_{r,s,\gamma} \frac{\ln^{(r/s+1/2)(s-1)} N}{N^{r/s-1/2}},$$

где оператор T_N определен равенствами

$$n = \max \left\{ l \in Z_+ : \text{card} \left[\bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < l}} \{k(A_{l,\tau}^{-1})'\} : k \in K(l, \tau)\} \right] \leq N \right\}, \quad (1.4.4)$$

$$(T_N f)(x) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f(k(A_{n,\tau}^{-1})') \sum_{m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i(m, x - k(A_{n,\tau}^{-1})')}. \quad (1.4.5)$$

Теорема 4. Пусть s целое положительное число. Тогда имеют место следующие оценки снизу:

1) при $r > 1$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{r-1+1/\nu}} \ll_{r,s,\nu} \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\dots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu,$$

2) при $r > 1/2$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{r-(1/2-1/\nu)_+}} \ll_{r,s,\nu} \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\dots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), \cdot) \right\|_\nu,$$

где \inf_{φ_N} берется по всем функциям

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C,$$

измеримым по переменной x в смысле Лебега.

Теорема 5. Пусть s -целое положительное число и $r > 1$. Тогда при любом целом положительном N имеет место соотношение

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\dots,N)}} \inf_{\psi_k \in L^2} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{\asymp} N^{-r+1/2} \ln^{r(s-1)} N,$$

где F есть любой из классов E_s^r и $SW_1^r(0,1)^s$, причем такой оптимальный порядок погрешности достигается при восстановлении оператором T_N из теоремы 3.

Прежде чем приступить к доказательству теорем установим необходимые для этого соотношения, которые следуют из вспомогательных и основных лемм.

Пусть N произвольное фиксированное целое положительное число и пусть n целое положительное число, определенное равенством (1.4.4).

Полагая в лемме 1.2.4 $\beta_m \equiv 1(m \in Z^s)$,

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_n = \{\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < n\}, \quad (1.4.6)$$

$$\rho_\tau \equiv \rho(\tau) = \{m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j-1} \leq \bar{m}_j < 2^{\tau_j} (j = 1, 2, \dots, s)\}, \quad (1.4.7)$$

$$A_\tau \equiv A_{n,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{n-\|\tau\|} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(n-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_3^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \dots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

и

$$K_\tau \equiv K(n, \tau) = \{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{n-\|\tau\|} \leq k_1 < 2^{\tau_1} p_{n-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \leq k_j < 2^{\tau_j} (j = 2, 3, \dots, s)\}, \quad (1.4.9)$$

и учитывая тот факт, что в силу леммы 1.2.2 система $K_\tau \equiv K(n, \tau)$ является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda'_{n,\tau} = \{uA'_{n,\tau} : u \in Z^s\}$, для всякой 1- периодической по каждой переменной и разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ имеем

$$f(x) - (T_N f)(x) = J_{1,N}(x, f) + J_{2,N}(x, f), \quad (1.4.10)$$

где оператор T_N определен равенством (1.4.5) и

$$J_{1,N}(x, f) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right) e^{2\pi i(m,x)}, \quad (1.4.11)$$

$$J_{2,N}(x, f) = \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m,x)} (x \in R^s). \quad (1.4.12)$$

Далее, для каждого $\tau \in Z^s$ с $\tau_j > 0 (j = 1, 2, \dots, s)$ и $\tau < n$ при любых $u \in Z^s$ и $m \in \rho(\tau)$ имеет место двусторонняя оценка

$$2^{\|\tau\|-s} \cdot \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \leq \overline{uA_{n,\tau} + m} < 2^{\|\tau\|+2s} \cdot \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}}, \quad (1.4.13)$$

где

$$V_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}} = \begin{pmatrix} p_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2^{(k)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3^{(k)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_s^{(k)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} (k = 1, 2, \dots), \quad (1.4.14)$$

и, напомним, для $y = (y_1, y_2, \dots, y_s) \in Z^s$ положено

$$\overline{y_j} = \max\{1, |y_j|\}, \overline{y} = \prod_{j=1}^s \overline{y_j}. \quad (1.4.15)$$

Действительно, пусть вектор $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ из Z^s такой, что $\tau_j > 0$ и $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < n$. Тогда при любых $u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s$ и $m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in \rho(\tau)$, применяя лемму 1.2.7 к каждой компоненте вектора

$$uA_{n,\tau} + m = (2^{\tau_1+1}(p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - \dots - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s) + m_1, 2^{\tau_2+1}u_2 + m_2, \dots, 2^{\tau_s+1}u_s + m_s),$$

получим

$$\begin{aligned} & 2^{\tau_1-1} \overline{p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - a_3^{(n-\|\tau\|)}u_3 - \dots - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s} \leq \\ & \leq \overline{2^{\tau_1+1}(p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - a_3^{(n-\|\tau\|)}u_3 - \dots - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s) + m_1} < \\ & < 2^{\tau_1+2} \overline{p_{n-\|\tau\|}u_1 - a_2^{(n-\|\tau\|)}u_2 - a_3^{(n-\|\tau\|)}u_3 - \dots - a_s^{(n-\|\tau\|)}u_s}, \\ & 2^{\tau_j-1} \overline{u_j} \leq \overline{2^{\tau_j+1}u_j + m_j} < 2^{\tau_j+2} \overline{u_j} (j = 2, \dots, s), \end{aligned}$$

или

$$2^{\tau_j-1} \overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}})_j} \leq \overline{(uA_{n,\tau} + m)_j} < 2^{\tau_j+2} \overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}})_j}, \quad (1.4.16)$$

где для вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ положено $(x)_j \equiv x_j (j = 1, 2, \dots, s)$. Отсюда перемножая отдельно правые и отдельно левые части и учитывая обозначения (1.4.14), (1.4.8) и (1.4.15) получим (1.4.13).

Далее, для всякого $\alpha > 1$ существует константа $c_0(s, \alpha)$ такая, что для каждого $k(k = 1, 2, 3, \dots)$ имеет место неравенство

$$\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{(\overline{uV}_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}})^\alpha} \leq c_0(s, \alpha) \frac{\ln^{\alpha\gamma} p_k}{p_k^\alpha}. \quad (1.4.17)$$

Действительно, во-первых, в силу леммы 2.5 при любом фиксированном $k(k = 1, 2, 3, \dots)$ имеет место равенство

$$\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{(\overline{uV}_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}})^\alpha} = \sum_{\substack{m \in Z^s \setminus \{0\}: \\ m_1 + a_2^{(k)} m_2 + \dots + a_s^{(k)} m_s \equiv 0 \pmod{p_k}}} \frac{1}{(\overline{m})^\alpha}. \quad (1.4.18)$$

Во-вторых, поскольку для каждого $k(k = 1, 2, 3, \dots)$ числа $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}$ - есть оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса γ , то в силу леммы 1.1.1.2 для указанного $\alpha > 1$ существует константа $c_0(s, \alpha)$ такая, что при любом $k(k = 1, 2, 3, \dots)$ имеет место неравенство

$$\sum_{\substack{m \in Z^s \setminus \{0\}: \\ m_1 + a_2^{(k)} m_2 + \dots + a_s^{(k)} m_s \equiv 0 \pmod{p_k}}} \frac{1}{(\overline{m})^\alpha} \leq c_0(s, \alpha) \frac{\ln^{\alpha\gamma} p_k}{p_k^\alpha}. \quad (1.4.19)$$

В итоге, объединяя соотношения (1.4.18) и (1.4.19) получим (1.4.17).

Для числа узлов сетки

$$\bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k \in K(n, \tau)\}$$

справедлива оценка

$$\text{card} \bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k \in K(n, \tau)\} \ll_s 2^n n^{s-1}. \quad (1.4.20)$$

Действительно,

$$\text{card} \bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k \in K(n, \tau)\} \leq \text{card} \bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} K(n, \tau) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \text{card} K(n, \tau),$$

откуда, учитывая определение множества $K(n, \tau)$ (см. (1.4.9)) и соотношения

$$\sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| = k} 1 \underset{s}{\asymp} k^{s-1} (k = 1, 2, \dots) \quad (1.4.21)$$

и

$$2^{k+3} \leq p_k \cdot k^2 < 2^{k+4} (k = 1, 2, \dots), \quad (1.4.22)$$

получим

$$\begin{aligned} \text{card} \bigcup_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \{k(A_{n,\tau}^{-1})' : k \in K(n, \tau)\} &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} 2^{\|\tau\|+s} p_{n-\|\tau\|} = \sum_{k=s}^{n-1} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| = k}} 2^{\|\tau\|+s} p_{n-\|\tau\|} = \\ &= \sum_{k=s}^{n-1} 2^{k+s} p_{n-k} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| = k}} 1 \ll_s \sum_{k=s}^{n-1} 2^{k+s} p_{n-k} k^{s-1} \leq \sum_{k=s}^{n-1} 2^{k+s} \frac{2^{n-k+4}}{(n-k)^2} k^{s-1} \leq \\ &\leq 2^{n+s+4} n^{s-1} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{(n-k)^2} \ll_s 2^n n^{s-1}. \end{aligned}$$

Ниже для $k = 1, 2, \dots$ будем пользоваться также следующими представлениями множества $Z^s \setminus \{0\}$:

$$Z^s \setminus \{0\} = \bigcup_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s} \geq \frac{p_k}{c_0 \ln^\gamma p_k}}} \{u \in Z^s : uV_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}} \in \rho(\lambda)\}, \quad (1.4.23)$$

где $c_0 > 0$ и $\gamma > 0$ те же, что и в определении оптимальных коэффициентов (1.1.1.1), p_k - есть простое число, целые $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}$ - оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса $\gamma > 0$, а $V_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}}$ - есть матрица, определенная равенством (1.4.14).

Справедливость таких представлений следует из неравенств

$$\overline{uV_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}}} \geq \frac{p_k}{c_0 \ln^\gamma p_k} (u \in Z^s \setminus \{0\}, k = 1, 2, \dots),$$

которые в свою очередь следуют из лемм 1.1.1.3 и 1.2.4.

Кроме того, поскольку отображение $l(u) = uV_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}} (u \in Z^s)$ - является однозначным отображением и не пересекаются множества $\rho(\lambda)$ для различных $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \in Z^s (\lambda_j > 0)$, то множества в правой части (1.4.23) также не пересекаются.

Наконец, при любых $k (k = 1, 2, \dots)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \in Z^s (\lambda_j > 0)$ имеет место оценка

$$card\{u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s : uV_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}} \in \rho(\lambda)\} \leq 2^{\|\lambda\| + 2s + 2} \frac{c_0 \ln^\gamma p_k}{p_k}. \quad (1.4.24)$$

Действительно, в силу леммы 1.2.5

$$\begin{aligned} & card\{u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in Z^s : uV_{p_k, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}} \in \rho(\lambda)\} = \\ & = card\{m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in \rho(\lambda) : m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \dots + a_s^{(k)}m_s \equiv 0 \pmod{p_k}\} = \\ & = \sum_{m \in \rho(\lambda)} \chi_p(m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \dots + a_s^{(k)}m_s) \leq \\ & \leq \sum_{m_1 = -2^{\lambda_1 + 1}}^{2^{\lambda_1 + 1}} \dots \sum_{m_{s1} = -2^{\lambda_{s1} + 1}}^{2^{\lambda_{s1} + 1}} \chi_p(m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \dots + a_s^{(k)}m_s). \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу лемм 1.1.1.3 и 1.1.1.4

$$\sum_{m_1 = -2^{\lambda_1 + 1}}^{2^{\lambda_1 + 1}} \dots \sum_{m_s = -2^{\lambda_s + 1}}^{2^{\lambda_s + 1}} \chi_p(m_1 + a_2^{(k)}m_2 + \dots + a_s^{(k)}m_s) \leq 2^{\|\lambda\| + 2s + 2} \frac{c_0 \ln^\gamma p_k}{p_k}.$$

Объединяя эти соотношения получим (1.4.24).

Приступим к доказательству утверждения 1) теоремы 3.

Пусть $f \in E_s^r$. Оценим сначала $J_{1,N}(\cdot, f)$ в (1.4.10). Из (1.4.11), с учетом определения класса E_s^r и соотношений (1.4.13)-(1.4.14), получим

$$\begin{aligned} \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_\infty & \equiv \sup_{x \in [0,1]^s} |J_{1,N}(\cdot, f)| \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left| \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right| \leq \\ & \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uA_{n,\tau} + m} \right)^r} \ll_{r,s} \\ & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^r} \ll_{r,s} \\ & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^r} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1, \end{aligned}$$

откуда, с учетом соотношений

$$\sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \ll_{r,s} 2^{\|\tau\|} (\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) \in Z^s, \tau_j > 0), \quad (1.4.25)$$

получим

$$\|J_{1,N}(\cdot, f)\|_{\infty} \ll_{r,s} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}}\right)^r}.$$

Тогда в силу (1.4.17) и неравенств $2^{k+3} \leq k^2 p_k < 2^{k+4} (k = 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned} \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_{\infty} &\ll_{r,s} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \cdot \frac{\ln^{r\gamma} p_{n-\|\tau\|}}{p_{n-\|\tau\|}^r} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \cdot \frac{(n - \|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}} = \sum_{k=s}^{n-1} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \cdot \frac{(n - \|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}} = \\ &= \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{2^{k(r-1)}} \cdot \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} 1. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (1.4.21)

$$\begin{aligned} \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_{\infty} &\ll_{r,s} \ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{2^{k(r-1)}} \cdot \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} \cdot k^{s-1} = \frac{1}{2^{n(r-1)}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)} \cdot k^{s-1}}{2^{(n-k)r}} \leq \\ &\leq \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|J_{1,N}(\cdot, f)\|_{\infty} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \quad (1.4.26)$$

Оценим сверху $\|J_{1,N}(\cdot, x)\|_2$. Из (1.4.10) с учетом определения класса E_s^r и соотношений (1.4.13)-(1.4.14) получим

$$\begin{aligned} \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_2^2 &= \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uA_{n,\tau} + m}\right)^r} \right)^2 \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}}\right)^r} \right)^2 \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}}\right)^r} \right)^2 \sum_{m \in \rho(\tau)} 1, \end{aligned}$$

откуда, учитывая соотношения (1.4.25) и пользуясь неравенствами (1.4.17) при $\alpha \equiv r > 1$,

$$\|J_{1,N}(\cdot, f)\|_2^2 \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}}\right)^r} \right)^2 \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}} \cdot \frac{\ln^{2r\gamma} p_{n-\|\tau\|}}{p_{n-\|\tau\|}^{2r}}.$$

Далее, продолжим оценку с учетом неравенств (1.4.22) и (1.4.21):

$$\begin{aligned} & \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_2^2 \ll_{r,s} \\ & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}} \cdot \frac{(n - \|\tau\|)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-\|\tau\|)}} = \sum_{k=s}^{n-1} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\|=k}} \frac{1}{2^{(2r-1)\|\tau\|}} \cdot \frac{(n - \|\tau\|)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-\|\tau\|)}} = \\ & = \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{2^{(2r-1)k}} \cdot \frac{(n - k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-k)}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\|=k}} 1 \ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{2^{(2r-1)k}} \cdot \frac{(n - k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{2r(n-k)}} \cdot k^{s-1} \leq \\ & \leq \frac{1}{2^{(2r-1)n}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n - k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{n-k}} \cdot k^{s-1} \leq \frac{n^{s-1}}{2^{(2r-1)n}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n - k)^{2r(\gamma+2)}}{2^{n-k}} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{(2r-1)n}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|J_{1,N}(\cdot, f)\|_2 \ll_{r,s} \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}}. \quad (1.4.27)$$

В итоге, из (1.4.26) и (1.4.27) пользуясь хорошо известным неравенством

$$\|g(\cdot)\|_\nu \leq \|g(\cdot)\|_2^{2/\nu} \|g(\cdot)\|_\infty^{1-2/\nu} \quad (2 \leq \nu \leq \infty), \quad (1.4.28)$$

которое следует из теоремы Рисса - Торина (см., напр., [9]), для $2 \leq \nu \leq \infty$ получим

$$\|J_{1,N}(\cdot, f)\|_\nu \leq \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_2^{2/\nu} \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_\infty^{1-2/\nu} \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}}. \quad (1.4.29)$$

Теперь оценим $J_{2,N}(\cdot, f)$ в (1.4.10). Из (1.4.12) следует, что

$$\begin{aligned} \|J_{2,N}(\cdot, f)\|_2^2 &= \sum_{m \in \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \rho(\tau)} |\hat{f}(m)|^2 = \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} |\hat{f}(m)|^2 \leq \\ &\leq \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} \frac{1}{(\overline{m})^{2r}}. \end{aligned}$$

Отсюда учитывая (см. (1.4.7)) то, что для всякого $m \in \rho(\tau)$ выполнено $\overline{m} \geq 2^{\|\tau\|-s}$ и (1.4.25), получим

$$\begin{aligned} \|J_{2,N}(\cdot, f)\|_2^2 &\leq \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^{2r}} = \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^{2r}} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \ll_s \\ &\ll_s \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^{2r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^{2r-1}} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{2r-1}} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} 1 \ll_s \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{2r-1}} k^{s-1} \ll_s \frac{n^{s-1}}{2^{n(2r-1)}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|J_{2,N}(\cdot, f)\|_2 \ll_{r,s} \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}}. \quad (1.4.30)$$

Аналогично,

$$\|J_{2,N}(\cdot, f)\|_\infty = \sum_{m \in \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \rho(\tau)} |\hat{f}(m)| = \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} |\hat{f}(m)| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0 \\ \|\tau\| \geq n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \frac{1}{(\overline{m})^r} \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0 \\ \|\tau\| \geq n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \frac{1}{(2\|\tau\|)^r} = \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0 \\ \|\tau\| \geq n}} \frac{1}{(2\|\tau\|)^r} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \ll_s \\
 &\ll_s \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0 \\ \|\tau\| \geq n}} \frac{1}{(2\|\tau\|)^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0 \\ \|\tau\|=k}} \frac{1}{(2\|\tau\|)^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{r-1}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0 \\ \|\tau\|=k}} 1 \ll_s \\
 &\ll_s \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{r-1}} k^{s-1} \ll_s \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \tag{1.4.31}
 \end{aligned}$$

Из (1.4.30) и (1.4.31) опять же пользуясь неравенством (1.4.28) для $2 \leq \nu \leq \infty$ получим

$$\|J_{2,N}(\cdot, f)\|_{\nu} \leq \|J_{2,N}(\cdot, f)\|_2^{2/\nu} \|J_{2,N}(\cdot, f)\|_{\infty}^{1-2/\nu} \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}}, \tag{1.4.32}$$

Итак, в силу (1.4.10)-(1.4.12), (1.4.29), (1.4.32) и (1.4.4), (1.4.20) для всех $f \in E_s^r$ имеем

$$\|f(\cdot) - (T_N f)(\cdot)\|_{\nu} \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}} \ll_{r,s,\nu} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1+1/\nu}}.$$

Тем самым, утверждение 1) теоремы 3 доказано.

Приступим к доказательству утверждения 2) теоремы 3. Пусть в (1.4.10) функция $f(x)$ принадлежит классу $SW_2^r(0, 1)^s$ ($r > 1/2$). Оценим сверху $J_{1,N}(t, x, f)$. Хорошо известно, что для тригонометрических коэффициентов Фурье свертки

$$h(x) \equiv \int_{[0,1]^s} f_1(y) f_2(x - y) dy,$$

где f_1 и f_2 произвольные суммируемые с квадратом на $[0, 1]^s$ и 1-периодические по каждой переменной функции, справедливо равенство

$$\hat{h}(m) = \hat{f}_1(m) \cdot \hat{f}_2(m) (m \in Z^s). \tag{1.4.33}$$

Учитывая это в силу определения класса $SW_2^r(0, 1)^s$ из равенства (1.4.11) получим

$$\begin{aligned}
 J_{1,N}(x, f) &= \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right) e^{2\pi i(m,x)} = \\
 &= \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{\varphi}_j(uA_{n,\tau} + m)(uA_{n,\tau} + m) \overline{(uA_{n,\tau} + m)}^{-r} e^{\frac{\pi i r}{2} \left(\sum_{k=1}^s \text{sign}(uA_{n,\tau} + m) k \right)} \right) e^{2\pi i(m,x)},
 \end{aligned}$$

где через $j(uA_{n,\tau} + m)$ обозначен набор индексов j_1, j_2, \dots, j_n ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq s$) отличных от нуля компонент вектора $uA_{n,\tau} + m$. Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$\begin{aligned}
 |J_{1,N}(x, f)| &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left| \hat{\varphi}_j(uA_{n,\tau} + m)(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \overline{(uA_{n,\tau} + m)}^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4.34}
 \end{aligned}$$

Далее, поскольку для каждого фиксированного $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ из Z^s такого, что $\tau_j > 0$ и $\|\tau\| \stackrel{def}{=} \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < n$ множество $\rho(\tau)$ является подмножеством полной системы представителей $K_{\tau} \equiv K(n, \tau)$ классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda_{n,\tau} = \{uA_{n,\tau} : u \in Z^s\}$ (см. (1.4.8)-(1.4.9)), то при различных парах u, m и u', m' ($u, u' \in$

$Z^s, m, m' \in \rho(\tau)$) элементы $uA_{n,\tau} + m$ и $u'A_{n,\tau} + m'$ решетки Z^s принадлежат различным классам, т.е. $uA_{n,\tau} + m \neq u'A_{n,\tau} + m'$. Следовательно,

$$\left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left| \hat{\varphi}_j(uA_{n,\tau} + m)(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^s \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq s} \|\varphi_{j_1, j_2, \dots, j_n}(\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу определения класса $SW_2^r(0, 1)^s$

$$\left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left| \hat{\varphi}_j(uA_{n,\tau} + m)(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll_s 1.$$

С учетом последнего соотношения продолжим оценку (1.4.34):

$$\begin{aligned} |J_{1,N}(x, f)| &\ll_s \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(\overline{uA_{n,\tau} + m} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(2^{\|\tau\| + 2s} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \left(2^{-\|\tau\|(2r-1)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{k=s \\ k=s}}^{n-1} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| = k}} \left(2^{-\|\tau\|(2r-1)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \left(2^{-k(2r-1)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(\overline{uV_{p_{n-k}, a_2^{(n-k)}, \dots, a_s^{(n-k)}}} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| = k}} 1 \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \left(2^{-k(2r-1)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(\overline{uV_{p_{n-k}, a_2^{(n-k)}, \dots, a_s^{(n-k)}}} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} k^{s-1} = \\ &= \sum_{k=s}^{n-1} \frac{k^{s-1}}{2^{k(r-1/2)}} \left(\sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uV_{p_{n-k}, a_2^{(n-k)}, \dots, a_s^{(n-k)}}} \right)^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

отсюда, пользуясь соотношениями (1.4.17) при $\alpha = 2r > 1$, получим

$$|J_{1,N}(x, f)| \ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{k^{s-1}}{2^{k(r-1/2)}} \cdot \frac{\ln^{r\gamma} p_{n-k}}{p_{n-k}^r}.$$

Далее продолжим оценку с учетом (1.4.22), (1.4.21):

$$\begin{aligned}
 |J_{1,N}(x, f)| &\ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{k^{s-1}}{2^{k(r-\frac{1}{2})}} \cdot \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} = \frac{1}{2^{n(r-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{k^{s-1}(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \ll_{r,s} \\
 &\ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \leq \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{r(\gamma+2)}}{2^{\frac{k}{2}}} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \quad (1.4.35)
 \end{aligned}$$

Теперь в (1.4.10) оценим сверху $J_{2,N}(x, f)$. Из (1.4.12) учитывая определение класса $SW_2^r(0, 1)^s$ и равенство (1.4.33)

$$\begin{aligned}
 J_{2,N}(x, f) &= \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)} = \\
 &= \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} \hat{\varphi}_{j(m)}(m) (\overline{m})^{-r} e^{\frac{\pi i r}{2} \sum_{j=1}^s \text{sign}(m_j)} e^{2\pi i(m, x)},
 \end{aligned}$$

где через $j(m)$ обозначен набор индексов j_1, j_2, \dots, j_n ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq s$) отличных от нуля компонент вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$. Отсюда применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$|J_{2,N}(x, f)| \leq \left(\sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} |\hat{\varphi}_{j(m)}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} (\overline{m})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но,

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} |\hat{\varphi}_{j(m)}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{n=1}^s \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq s} \sum_{m \in Z^s} |\hat{\varphi}_{j_1, j_2, \dots, j_n}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \left(\sum_{n=1}^s \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq s} \|\varphi_{j_1, j_2, \dots, j_n}(\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll_s 1,
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
 |J_{2,N}(x, f)| &\ll_{r,s} \left(\sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} (\overline{m})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} (\overline{m})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left(\sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} (2^{\|\tau\| - s})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} (2^{\|\tau\| - s})^{-2r} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \ll_{r,s} \\
 &\ll_{r,s} \left(\sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} (2^{\|\tau\|})^{-2r} 2^{\|\tau\|} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} (2^{\|\tau\|})^{-2r+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \left(\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} (2^{\|\tau\|})^{-2r+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} (2^k)^{-2r+1} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} 1 \right)^{\frac{1}{2}} \ll_{r,s} \\
 &\ll_{r,s} \left(\sum_{k=n}^{\infty} (2^k)^{-2r+1} k^{s-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k^{s-1}}{(2^k)^{2r-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \ll_{r,s} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \quad (1.4.36)
 \end{aligned}$$

В итоге, из (1.4.10), (1.4.11), (1.4.12), (1.4.35) и (1.4.36)

$$\sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \|f(\cdot) - (T_N f)(\cdot)\|_\infty \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1/2)}},$$

или в пересчете на число узлов N (см.(1.4.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \|f(\cdot) - (T_N f)(\cdot)\|_\infty \ll_{r,s} \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}}.$$

Тем самым, утверждение 2 теоремы 3 доказана.

Приступим к доказательству утверждения 3) теоремы 3. Поскольку при $1 \leq \theta < \infty$ имеет место вложение $B_{2,\theta}^r(0,1)^s \subset B_{2,\infty}^r(0,1)^s \equiv H_2^r(0,1)^s$, то утверждение 3) достаточно доказать для класса Никольского $B_{2,\infty}^r(0,1)^s \equiv H_2^r(0,1)$. Пусть в (1.4.10) функция $f(x)$ принадлежит классу $B_{2,\infty}^r(0,1)^s \equiv H_2^r(0,1)$ ($r > 1/2$). Сперва оценим сверху $J_{1,N}(x, f)$. Из (1.4.11) в силу абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ следует равенство ($x \in R^s$)

$$J_{1,N}(x, f) = - \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}, m \in \rho(\tau)} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) e^{2\pi i(m,x)}. \quad (1.4.37)$$

Далее, при каждом фиксированном $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ из Z^s таком, что $\tau_j > 0$ и $\|\tau\| \stackrel{def}{=} \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < n$ пользуясь представлением (1.4.23) при $k = n - \|\tau\|$ и учитывая то, что множества в правой части (1.4.23) попарно не пересекаются, группируем членов ряда в правой части (1.4.39) следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{1,N}(x, f) &= - \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}, m \in \rho(\tau)} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) e^{2\pi i(m,x)} = \\ &= - \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \sum_{u \in V_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda), m \in \rho(\tau)} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) e^{2\pi i(m,x)} = \\ &= - \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \int_{[0,1]^s} f(y) \sum_{u \in V_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda), m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i(m,x) - 2\pi i(uA_{n,\tau} + m,y)} dy = \\ &= - \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \int_{[0,1]^s} \Delta_{h(\tau,\lambda)}^{[r]+2} f(y) P_{\lambda,\tau}(x, y) dy, \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

где

$$\Delta_{h(\tau,\lambda)}^{[r]+2} f(y) \equiv \sum_{l=0}^{[r]+2} (-1)^{[r]+2-l} C_{[r]+2}^l f(x + lh(\tau,\lambda)), \quad (1.4.39)$$

$$h(\lambda,\tau) = 2^{-(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0})-4} \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{j_0} (\tau_{j_0} + \lambda_{j_0} = \max_{1 \leq j \leq s} (\tau_j + \lambda_j)), \quad (1.4.40)$$

$$\begin{aligned} P_{\tau,\lambda}(x, y) &= \\ &= \sum_{u \in Z^s, m \in \rho(\tau): u \in V_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)} a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau} + m) e^{2\pi i(m,x) - 2\pi i(uA_{n,\tau} + m,y)}, \end{aligned} \quad (1.4.41)$$

$$a_{\tau,\lambda}(\sigma) = (e^{2\pi i \sigma_{j_0} 2^{-(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0}) - 4, \tau}} - 1)^{-[r]-2} (\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s) \in R^s). \quad (1.4.42)$$

Следовательно,

$$|J_{1,N}(x, f)| \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{|\lambda|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \left\| \Delta_{h^{(\tau,\lambda)}}^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_2 \|P_{\lambda,\tau}(x, \cdot)\|_2. \quad (1.4.43)$$

В силу определения класса $B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)$ (см. также (1.4.40))

$$\left\| \Delta_{h^{(\tau,\lambda)}}^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_2 \leq \left| h^{(\tau,\lambda)} \right|^r \leq 2^{-r(\tau_{j_0} + \lambda_{j_0})} \quad (1.4.44)$$

Теперь в (1.4.43) оценим сверху $\|P_{\lambda,\tau}(x, \cdot)\|_2$ ($x \in R^s$). Для этого сначала покажем, что для всех $u \in Z^s \setminus \{0\}$ и $m \in \rho(\tau)$ таких, что $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$ имеет место

$$|a_{\lambda,\tau}(uA_{n,\tau} + m)| \ll_s 1. \quad (1.4.45)$$

Действительно, для всякого $u \in Z^s \setminus \{0\}$ такого, что $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$ и для каждого $m \in \rho(\tau)$ пользуясь соотношением (1.4.16) при $j = j_0$ получим

$$2^{\tau_{j_0}-1} \overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}})_{j_0}} \leq \overline{(uA_{n,\tau} + m)_{j_0}} < 2^{\tau_{j_0}+2} \overline{(uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}})_{j_0}},$$

где, напомним, для вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ положено $(x)_j \equiv x_j$ ($j = 1, 2, \dots, s$). Откуда, учитывая включение $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$, получим

$$2^{\tau_{j_0} + \lambda_{j_0} - 2} \leq |(uA_{n,\tau} + m)_{j_0}| < 2^{\tau_{j_0} + \lambda_{j_0} + 2}.$$

Следовательно, для всех $u \in Z^s \setminus \{0\}$ и $m \in \rho(\tau)$ таких, что $uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)$ имеет место

$$\begin{aligned} & |a(uA_{n,\tau} + m)| = \\ & = \left| \left(e^{2\pi i (uA_{n,\tau} + m)_{j_k} 2^{-(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0}) - 4}} - 1 \right)^{-[r]-2} \right| = \left(2 \left| \sin \pi \left| (uA_{n,\tau} + m)_{j_0} 2^{-(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0}) - 4} \right| \right| \right)^{-[r]-2} \leq \\ & \leq \left(2 \left| \sin \frac{\pi}{2^6} \right| \right)^{-[r]-2} \ll_{r,s} 1, \end{aligned}$$

т.е. неравенство (1.4.45) доказано. Тогда из (1.4.41) и (1.4.45) следует, что

$$\|P_{\lambda,\tau}(x, \cdot)\|_2^2 = \sum_{u \in Z^s, m \in \rho(\tau) : uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)} |a_{\lambda,\tau}(uA_{n,\tau} + m)|^2 \ll_{r,s}$$

$$\ll_{r,s} \sum_{u \in Z^s, m \in \rho(\tau) : uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)} 1 \leq$$

$$\leq \text{card}\{\rho(\tau)\} \cdot \text{card}\{u \in Z^s : uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}} \in \rho(\lambda)\},$$

отсюда в силу (1.4.24), (1.4.25) и (1.4.22)

$$\|P_{\lambda,\tau}(x, \cdot)\|_2^2 \ll_{r,s} 2^{\|\tau\|} \frac{2^{|\lambda|} \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}{p_{n-\|\tau\|}} \ll_{r,s} \frac{2^{|\lambda| + \|\tau\|} (n - \|\tau\|)^{\gamma+2}}{2^{n-\|\tau\|}}. \quad (1.4.46)$$

В итоге, из (1.4.43), (1.4.44) и (1.4.46) следует

$$\begin{aligned}
 & |J_{1,N}(x, f)| \ll_{r,s} \\
 & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-r(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0})} \frac{2^{\frac{\|\lambda\| + \|\tau\|}{2}} (n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} \ll_{s,r} \\
 & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-\frac{r(\|\lambda\| + \|\tau\|)}{s}} \frac{2^{\frac{\|\lambda\| + \|\tau\|}{2}} (n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} \ll_{s,r} \\
 & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{(n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\| + \frac{n-\|\tau\| - \|\tau\|}{2}}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s : \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{1}{2^{(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})\|\lambda\|}} \ll_{s,r} \\
 & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{(n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\| + \frac{n-\|\tau\| - \|\tau\|}{2}}} \left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}} \right)^{-(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})} \ln^{s-1} \left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}} \right),
 \end{aligned}$$

далее продолжим с учетом (1.4.22) и (1.4.21):

$$\begin{aligned}
 & \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{(n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\| + \frac{n-\|\tau\| - \|\tau\|}{2}}} \frac{(n - \|\tau\|)^{(\gamma+2)(\frac{r}{s} - \frac{1}{2}) + s - 1}}{2^{(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})(n - \|\tau\|)}} = \\
 & = \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{(n - \|\tau\|)^{\frac{(\gamma+2)r}{s} + s - 1}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} = \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s} + s - 1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| = k}} 1 \ll_s \\
 & \ll_s \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s} + s - 1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} k^{s-1} \ll_s \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s} + s - 1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \ll_s \\
 & \ll_{r,s,\gamma} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})}},
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\sup_{x \in [0,1]^s} |J_{1,N}(x, f)| \ll_{r,s,\gamma} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (1.4.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{x \in [0,1]^s} |J_{1,N}(x, f)| \ll_{r,s,\gamma} \frac{\ln(\frac{r}{s} + \frac{1}{2})(s-1) N}{N^{\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}}. \tag{1.4.47}$$

Теперь в (1.4.10) оценим сверху $\sup_{x \in [0,1]^s} |J_{2,N}(x, f)|$. Из (1.4.12) следует, что

$$\begin{aligned}
 J_{2,N}(x, f) &= \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \int_{[0,1]^s} f(y) \sum_{m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i(m,x) - 2\pi i(m,y)} dy = \\
 &= \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \int_{[0,1]^s} \Delta_h^{[r]+2} f(y) \dots P_\tau(x, y) dy, \tag{1.4.48}
 \end{aligned}$$

где

$$h^\tau = 2^{-\tau j_0 - 4} \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{j_0} (\tau_{j_0} = \max_{1 \leq j \leq s} (\tau_j)), \quad (1.4.49)$$

$$P_\tau(x, y) = \sum_{m \in \rho(\tau)} (e^{2\pi i m_{j_0} \cdot 2^{-\tau j_0 - 4}} - 1)^{-[r]-2} e^{2\pi i(m, x) - 2\pi i(m, y)}. \quad (1.4.50)$$

В (1.4.48) для каждого τ оценим отдельно $\left\| \Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_2$ и $\|P_{\tau, j_1, \dots, j_s}(x, y)\|_2$. В силу определения класса $B_{2, \infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)$ (см. также (1.4.49))

$$\left\| \Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_2 \leq |h^\tau|^r \leq 2^{-r(\tau_{j_0} + \lambda_{j_0})}. \quad (1.4.51)$$

Из (1.4.50) следует

$$\begin{aligned} \|P_\tau(x, \cdot)\|_2^2 &= \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| e^{2\pi i m_{j_0} \cdot 2^{-\tau j_0 - 4}} - 1 \right|^{-2l} = \sum_{m \in \rho(\tau)} 2^{-2} \left| \sin(\pi m_{j_0} \cdot 2^{-\tau j_0 - 4}) \right|^{-2([r]+2)} = \\ &= \sum_{m \in \rho(\tau)} 2^{-2} \left| \sin(\pi |m_{j_0}| \cdot 2^{-\tau j_0 - 4}) \right|^{-2([r]+2)} \leq \sum_{m \in \rho(\tau)} 2^{-2} \left| \sin(\pi 2^{-5}) \right|^{-2([r]+2)} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \ll_{r,s} \text{card} \rho(\tau) \ll_{r,s} 2^{\|\tau\|}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|P_\tau(x, \cdot)\|_2 \ll_{r,s} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}}. \quad (1.4.52)$$

В итоге, из (1.4.48), (1.4.51) и (1.4.52) получим

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]^s} |J_{2, N}(x, f)| &\ll_{r,s} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} 2^{-r\tau_{j_0}} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}} \leq \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} 2^{-\frac{r\|\tau\|}{s}} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-\left(\frac{r}{s} - \frac{1}{2}\right)k} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| = k} 1 \ll_s \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-\left(\frac{r}{s} - \frac{1}{2}\right)k} k^{s-1} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n\left(\frac{r}{s} - \frac{1}{2}\right)}} \\ &\sup_{x \in [0, 1]^s} |J_{2, N}(x, f)| \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n\left(\frac{r}{s} - \frac{1}{2}\right)}}, \end{aligned}$$

или в пересчете на число узлов N (см. (1.4.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{x \in [0, 1]^s} |J_{2, N}(x, f)| \ll_{r,s} \frac{\ln\left(\frac{r}{s} + \frac{1}{2}\right)(s-1) N}{N^{\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}}. \quad (1.4.53)$$

Наконец, в силу (1.4.10), (1.4.47) и (1.4.53)

$$\sup_{f \in H_2^r(0, 1)^s} \|f(\cdot) - (T_N f)(\cdot)\|_\infty \ll_{r,s} \frac{\ln\left(\frac{r}{s} + \frac{1}{2}\right)(s-1) N}{N^{\frac{r}{s} - \frac{1}{2}}}.$$

Теорема 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 4. Сначала докажем оценку 1). Пусть $r > 1$ и $\omega(t)$ -бесконечно дифференцируемая на R функция, удовлетворяющая условиям

$$\{t : \omega(t) \neq 0\} \subset (0, 1) \quad (1.4.54)$$

и пусть $c_1(r, s, \omega) > 0$ есть константа из утверждения 1) леммы 1.2.8, соответствующая данным r и $\omega(t)$.

Пусть даны произвольное целое положительное число N , измеримая в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ функция

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, 1]^s \rightarrow C$$

и произвольная сетка $\xi = \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^N \subset [0, 1]^s$.
Тогда, поскольку открытые подкубы куба $[0, 1]^s$

$$J_{n,\mu} \equiv \left(\frac{\mu}{N+1}, \frac{\mu+1}{N+1} \right) \times (0, 1)^{s-1},$$

где $0 \leq \mu \leq N$ - целые, попарно не пересекаются и их количество $N+1$, то среди них найдется подкуб, не содержащий ни одного из узлов $\xi^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, N$) заданной сетки ξ , т.е. найдется целое $0 \leq \mu^{(0)} < N+1$ такое, что для $k=1, 2, \dots, N$

$$\xi^{(k)} \notin J_{n,\mu} \equiv \left(\frac{\mu^{(0)}}{N+1}, \frac{\mu^{(0)}+1}{N+1} \right) \times [0, 1]^{s-1}. \quad (1.4.55)$$

В силу утверждения 1) леммы 1.2.8 1-периодическая по каждой переменной функция, определенная равенством

$$f_\xi(x_1, x_2, \dots, x_s) \equiv \frac{c_1(r, s, \omega)}{(N+1)^{r-1}} \omega((N+1)x_1 - \mu^{(0)}) (0 \leq x_1 < 1) \quad (1.4.56)$$

принадлежит классу E_s^r . Кроме того, из (1.4.54) следует, что

$$\forall x \in [0, 1]^s \setminus \left(\frac{\mu^{(0)}}{N+1}, \frac{\mu^{(0)}+1}{N+1} \right) \times [0, 1]^{s-1} \Rightarrow f_\xi(x) = 0.$$

Отсюда, в частности,

$$f_\xi(\xi^{(k)}) = 0 (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.4.57)$$

Далее, поскольку вместе с (1.4.56) принадлежит классу E_s^r и функция $-f_\xi(x)$, то с учетом (1.4.57) получим

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), x) \right\|_{L^\nu(0,1)^s} \geq \\ & \max_{j=0,1} \left\| (-1)^j f_\xi(x) - \varphi_N((-1)^j f_\xi(\xi^{(1)}), (-1)^j f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, (-1)^j f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \left(\left\| f_\xi(x) - \varphi_N(f_\xi(\xi^{(1)}), f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu + \right. \\ & \left. + \left\| -f_\xi(x) - \varphi_N(-f_\xi(\xi^{(1)}), -f_\xi(\xi^{(2)}), \dots, -f_\xi(\xi^{(N)}), x) \right\|_\nu \right) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\left\| f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x) \right\|_\nu + \left\| f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x) \right\|_\nu \right) \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \left\| (f_\xi(x) - \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)) + (f_\xi(x) + \varphi_N(0, 0, \dots, 0, x)) \right\|_\nu = \left\| f_\xi(x) \right\|_\nu = \\ & = \frac{c_1(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{(N+1)^{r-1+\frac{1}{\nu}}}, \end{aligned}$$

Тем самым, доказано, что при любом целом положительном N для всякой сетки $\xi = \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^N \subset [0, 1]^s$ и измеримой в смысле Лебега по переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$ функции

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, x) : C^N \times [0, +\infty) \rightarrow C$$

имеет место

$$\sup_{f \in E_s^r} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), x) \right\|_{L^\nu(0,1)^s} \geq \frac{c_1(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{(N+1)^{r-1+\frac{1}{\nu}}}.$$

Так как правая часть последнего неравенства не зависит от сетки $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ и функции φ_N , то отсюда следует, что

$$\inf_{\xi^{(k)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \left\| f(x) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), x) \right\|_{L^\nu(0,1)^s} \geq \frac{c_1(r, s, \omega) \|\omega(\cdot)\|_\nu}{(N+1)^{r-1+\frac{1}{\nu}}}.$$

Этим доказано утверждение 1) теоремы 4. При $\nu \geq 2$ утверждение 2) теоремы 4 доказывается совершенно аналогично, с той лишь разницей, что в доказательстве вместо функции $f_\xi(x)$ (см. (1.4.56)) берется функция из второго утверждения леммы 3.7, а при $1 \leq \nu < 2$ утверждение 2) теоремы 4 следует из оценки, полученной в [30], в силу вложения

$$B_{2,2}^{rs}(0,1)^s \subset SW_2^r(0,1)^s.$$

Теорема 4 полностью доказана.

Доказательство теоремы 5. Сначала докажем вложение

$$SW_1^r(0,1)^s \subset E_s^r(r > 1). \quad (1.4.58)$$

Действительно, пусть $f(x) \in SW_1^r(0,1)^s$. Тогда в силу определения класса и равенства (1.4.33) имеем

$$\hat{f}(m) = \hat{\varphi}_{j(m)}(m) (\overline{m})^{-r} e^{2\pi i \sum_{j=1}^s \text{sign}(m_j)} (m \in Z^s),$$

где через $j(m)$ обозначено набор индексов $j_1, j_2, \dots, j_n (1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq s)$ отличных от нуля компонент вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$. Следовательно,

$$|\hat{f}(m)| = |\hat{\varphi}_{j(m)}(m)| (\overline{m})^{-r}.$$

Но,

$$|\hat{\varphi}_{j(m)}(m)| \leq \|\varphi_{j(m)}(\cdot)\|_1$$

и, в силу определения класса $SW_1^r(0,1)^s$,

$$\|\varphi_{j(m)}(\cdot)\|_1 \leq 1.$$

Стало быть,

$$|\hat{f}(m)| \leq (\overline{m})^{-r},$$

т.е. $f(x) \in E_s^r$. Тем самым, действительно имеет место вложение (1.4.58). А из (1.4.58) и из утверждения 1) теоремы 3 при $\nu = 2$ сразу же следует оценка сверху.

Докажем оценку снизу. Пусть N целое положительное число, $\{\xi^{(k)}\}_1^N$ произвольная фиксированная сетка и $\psi_k(x) \in L^2(0,1)^s (k = 1, 2, \dots, N)$ - произвольные фиксированные функции. Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \geq \\ & \geq \sup_{f \in F} \inf_{\substack{c_k \in C \\ (k = 1, 2, \dots, N)}} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N c_k \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \geq \\ & \geq \inf_{\substack{\theta_k \in L^2(0,1)^s \\ (k = 1, 2, \dots, N)}} \sup_{f \in F} \inf_{\substack{c_k \in C \\ (k = 1, 2, \dots, N)}} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N c_k \theta_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \equiv d_N(F, L^2), \quad (1.4.59) \end{aligned}$$

где F любой из классов E_s^r и $SW_1^r(0,1)^s (r > 1)$, а $d_N(F, L^2)$ колмогоровский поперечник класса F (см. [31]). Поскольку неравенство (1.4.59) справедливо для произвольных $\{\xi^{(k)}\}_1^N, \{\psi_k(x)\}_1^N$ и правая часть не зависит от них, то отсюда следует, что

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0, 1]^s \\ (k = 1, 2, \dots, N)}} \inf_{\psi_k(\cdot) \in L^2} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \geq d_N(F, L^2). \quad (1.4.60)$$

Из последнего соотношения учитывая включение (1.4.58) получим

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0, 1]^s \\ (k = 1, 2, \dots, N)}} \inf_{\psi_k(\cdot) \in L^2} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \geq d_N(SW_1^r(0, 1)^s, L^2).$$

Но, хорошо известно, что (см. [31])

$$d_N(SW_1^r, L^2) \underset{r,s}{\asymp} N^{-r+1/2} \ln^{r(s-1)} N (r > 1).$$

Следовательно,

$$\inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0, 1]^s \\ (k = 1, 2, \dots, N)}} \inf_{\psi_k(\cdot) \in L^2} \sup_{f \in F} \left\| f(\cdot) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(\cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{\gg} N^{-r+1/2} \ln^{r(s-1)} N.$$

Теорема 5 полностью доказана.

ГЛАВА 2. Приближенное восстановление решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов B , E и SW .

Пусть $u(t, x, f)$ есть решение задачи Коши уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} (t > 0, x \in R^s) \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = f(x). \quad (2.2)$$

Основными результатами данной главы являются следующие теоремы.

Теорема 6. Пусть дано целое положительное число s . Пусть для каждого $k(k = 1, 2, \dots)$ число p_k - есть простое число, удовлетворяющее соотношению $2^{k+3} \leq p_k \cdot k^2 < 2^{k+4}$, а целые числа $a_1^{(k)} = 1, a_2^{(k)}, \dots, a_s^{(k)}$ - оптимальные коэффициенты по модулю p_k индекса $\gamma \geq 0$. Пусть для всякого целого $l \geq s + 1$ и всякого $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s)$ из Z^s такого, что $\tau_j > 0$ и $\|\tau\| \stackrel{def}{=} \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < l$ матрица $A_{l,\tau}$ и множества $K(l, \tau), \rho(\tau)$ определены соответственно равенствами

$$A_{l,\tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{l-\|\tau\|} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(l-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_3^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \dots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$K(l, \tau) = \{k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{l-\|\tau\|} \leq k_1 < 2^{\tau_1} p_{l-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \leq k_j < 2^{\tau_j} (j = 2, 3, \dots, s)\}, \quad (2.4)$$

$$\rho(\tau) = \{m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j-1} \leq \max\{1, |m_j|\} < 2^{\tau_j} (j = 1, \dots, s)\}. \quad (2.5)$$

Тогда при любом натуральном $N \geq 2^{2s+5}$ имеют место следующие соотношения:

1) при $r > 1$ и $2 \leq \nu \leq \infty$

$$\sup_{f \in E_s^r} \sup_{t \geq 0} \left\| u(t, \cdot, f) - (T_N^{(0)} f)(t, \cdot) \right\|_{\nu} \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1+1/\nu}},$$

2) при $r > 1/2$

$$\sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} \left| u(t, x, f) - (T_N^{(0)} f)(t, x) \right| \ll \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}},$$

3) при $2r > s$ и $1 \leq \theta \leq \infty$

$$\sup_{f \in B_{2,\theta}^r(0,1)^s} \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} \left| u(t, x, f) - (T_N^{(0)} f)(t, x) \right| \ll \frac{\ln^{(r/s+1/2)(s-1)} N}{N^{r/s-1/2}},$$

где $u(t, x, f)$ - есть решение задачи (2.1)-(2.2), а оператор $T_N^{(0)}$ определен равенствами

$$n = n(N) = \max \left\{ l \in Z_+ : \text{card} \left[\begin{array}{l} \bigcup_{\tau \in Z^s :} \{k(A_{l,\tau}^{-1})' : k \in K(l, \tau)\} \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < l \end{array} \right] \leq N \right\}, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} (T_N^{(0)} f)(t, x) &= \\ &= \sum_{\tau \in Z^s :} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f(k(A_{n,\tau}^{-1})') \sum_{m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i(m, x - k(A_{n,\tau}^{-1})^{\odot}) - 4\pi^2(m, m)t}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Теорема 7. Пусть s целое положительное число. Тогда имеют место следующие оценки снизу:

1) при $r > 1$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{r-1+1/\nu}} \ll \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\dots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in E_s^r} \sup_{t \geq 0} \left\| u(t, \cdot, f) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), t, \cdot) \right\|_{\nu},$$

2) при $r > 1/2$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{r-(1/2-1/\nu)_+}} \ll \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\dots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r} \sup_{t \geq 0} \left\| u(t, \cdot, f) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), t, \cdot) \right\|_{\nu},$$

3) при $2r > s$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $1 \leq \nu \leq \infty$

$$\frac{1}{N^{r/s-(1/2-1/\nu)_+}} \ll \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,\dots,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in B_{2,\theta}^r} \sup_{t \geq 0} \left\| u(t, \cdot, f) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), t, \cdot) \right\|_{\nu},$$

где $u(t, x, f)$ - есть решение задачи (2.1)-(2.2), \inf_{φ_N} берется по всем функциям

$$\varphi_N(z_1, z_2, \dots, z_N, t, x) : C^N \times [0, +\infty) \times [0, 1]^s \rightarrow C,$$

измеримым по переменной x в смысле Лебега и для всякого вещественного α положено $(\alpha)_+ \equiv \frac{1}{2}(\alpha + |\alpha|)$.

Теорема 8. Пусть s -целое положительное число и $r > 1$. Тогда при любом целом положительном N имеет место соотношение

$$\inf_{\xi^{(k)} \in [0, 1]^s} \inf_{\psi_k(t, \cdot) \in L^2} \sup_{f \in F} \sup_{t \geq 0} \left\| u(t, \cdot, f) - \sum_{k=1}^N f(\xi^{(k)}) \psi_k(t, \cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s} \underset{r,s}{\succ} N^{-r+\frac{1}{2}} \ln^{r(s-1)} N,$$

$(k = 1, 2, \dots, N)$

где $u(t, x, f)$ - есть решение задачи (2.1)-(2.2), F есть любой из классов E_s^r и $SW_1^r(0, 1)^s$, причем такой оптимальный порядок погрешности достигается при восстановлении оператором $T_N^{(0)}$ из теоремы 6.

2.1. Вспомогательные утверждения.

В следующей лемме представлен общеизвестный результат, получаемый методом Фурье.

Лемма 2.1.1. Пусть s -целое положительное число. Для всякой 1-периодической по каждой переменной функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье решение $u(t, x, f)$ задачи (2.1)-(2.2) представимо в виде ($t \geq 0, x \in R^s$)

$$u(t, x, f) = \sum_{m \in Z^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x) - 4\pi^2(m, m)t},$$

где

$$\hat{f}(m) \equiv \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx \quad (m \in Z^s)$$

тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

2.2. Доказательства основных результатов. Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6 установим одно необходимое для этого равенство.

Пусть N произвольное фиксированное целое положительное число и пусть целое положительное число n определено по N равенством (2.6).

Полагая в лемме 1.2.4

$$\beta_m \equiv e^{-4\pi^2(m, m)t} \quad (m \in Z^s),$$

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_n = \{ \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_s < n \}, \tag{2.2.1}$$

$$\rho_\tau \equiv \rho(\tau) = \{ m = (m_1, m_2, \dots, m_s) \in Z^s : 2^{\tau_j-1} \leq \overline{m_j} < 2^{\tau_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s) \}, \tag{2.2.2}$$

$$A_\tau \equiv A_{n, \tau} = \begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1} p_{n-\|\tau\|} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_2^{(n-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ -2^{\tau_1+1} a_3^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2^{\tau_1+1} a_s^{(n-\|\tau\|)} & 0 & 0 & \dots & 2^{\tau_s+1} \end{pmatrix}, \tag{2.2.3}$$

$$K_\tau \equiv K(n, \tau) = \{ k \in Z^s : -2^{\tau_1} p_{n-\|\tau\|} \leq k_1 < 2^{\tau_1} p_{n-\|\tau\|}, -2^{\tau_j} \leq k_j < 2^{\tau_j} \quad (j = 2, 3, \dots, s) \}, \tag{2.2.4}$$

и учитывая тот факт, что в силу утверждения 2 леммы 1.2.2 система $K_\tau \equiv K(n, \tau)$ является полной системой представителей классов решетки Z^s относительно подрешетки $\Lambda'_{n, \tau} = \{ u A'_{n, \tau} : u \in Z^s \}$ и лемму 2.1.1, для всякой 1-периодической по каждой переменной и разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ имеем

$$u(t, x, f) - (T_N^{(0)} f)(t, x) = U_{1, N}(t, x, f) + U_{2, N}(t, x, f), \tag{2.2.5}$$

где оператор $T_N^{(0)}$ определен равенством (2.7) и

$$U_{1, N}(t, x, f) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(u A_{n, \tau} + m) \right) e^{2\pi i(m, x) - 4\pi^2(m, m)t}, \tag{2.2.6}$$

$$U_{2,N}(t, x, f) = \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x) - 4\pi^2(m, m)t} \quad (t \geq 0, x \in R^s). \quad (2.2.7)$$

Доказательство теоремы 6. Приступим к доказательству утверждения 1) теоремы 6. Пусть $f \in E_s^r$. Оценим сначала $U_{1,N}(t, \cdot, f)$ в (2.2.5). Из (2.2.6), с учетом определения класса E_s^r и соотношений (1.4.13)-(1.4.14), получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_\infty &\equiv \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{1,N}(t, \cdot, f)| \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left| \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uA_{n,\tau} + m} \right)^r} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^r} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(2^{\|\tau\|} \overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^r} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1, \end{aligned}$$

откуда, с учетом соотношений

$$\sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \ll_s 2^{\|\tau\|} (\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) \in Z^s, \tau_j > 0),$$

получим

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_\infty \ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \\ \|\tau\| < n}} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\overline{uV_{p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)}}} \right)^r}.$$

Тогда в силу (1.4.17) и неравенств $2^{k+3} \leq k^2 p_k < 2^{k+4} (k = 1, 2, \dots)$,

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_\infty &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \\ \|\tau\| < n}} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \cdot \frac{\ln^{r\gamma} p_{n-\|\tau\|}}{p_{n-\|\tau\|}^r} \ll_{r,s} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \\ \|\tau\| < n}} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \cdot \frac{(n - \|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}} = \sum_{k=s}^{n-1} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \\ \|\tau\| = k}} \frac{1}{2^{\|\tau\|(r-1)}} \cdot \frac{(n - \|\tau\|)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-\|\tau\|)r}} = \\ &= \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{2^{k(r-1)}} \cdot \frac{(n - k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \\ \|\tau\| = k}} 1. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (1.4.21)

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_{\infty} &\ll_{r,s} \ll_{r,s} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{2^{k(r-1)}} \cdot \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)r}} \cdot k^{s-1} = \frac{1}{2^{n(r-1)}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)} \cdot k^{s-1}}{2^{(n-k)}} \leq \\ &\leq \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{r(\gamma+2)}}{2^{(n-k)}} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_{\infty} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \quad (2.2.8)$$

Оценим сверху $\sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_2$. Из (2.2.6) следует равенство

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_2^2 = \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \equiv \|J_{1,N}(\cdot, f)\|_2^2,$$

где $J_{1,N}(\cdot, f)$ определено равенством (1.4.11), откуда в силу (1.4.27)

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_2 \ll_{r,s} \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}}. \quad (2.2.9)$$

В итоге, из (2.2.8) и (2.2.9) при любом фиксированном $t \geq 0$ пользуясь неравенством (1.4.28) получим ($2 \leq \nu \leq \infty$)

$$\|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_{\nu} \leq \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_2^{2/\nu} \|U_{1,N}(t, \cdot, f)\|_{\infty}^{1-2/\nu} \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-1/\nu)}}{2^{n(r-1+1/\nu)}}. \quad (2.2.10)$$

Теперь оценим $U_{2,N}(t, \cdot, f)$ в (2.2.5). Из (2.2.7) учитывая определение класса E_s^r получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_{\infty} &\leq \sum_{m \in \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \rho(\tau)} \left| \hat{f}(m) \right| = \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| \hat{f}(m) \right| \leq \\ &\leq \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} \frac{1}{(\overline{m})^r} \leq \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \sum_{m \in \rho(\tau)} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^r} = \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^r} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1 \ll_s \\ &\ll_s \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} \frac{1}{(2^{\|\tau\|})^{r-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{r-1}} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} 1 \ll_s \\ &\ll_s \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{r-1}} k^{s-1} \ll_s \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_{\infty} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-1)}}. \quad (2.2.11)$$

Оценим сверху $\sup_{t \geq 0} \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_2$. Из (2.2.7) следует равенство

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_2^2 = \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \equiv \|J_{2,N}(\cdot, f)\|_2^2,$$

где $J_{2,N}(\cdot, f)$ определено равенством (1.4.12), откуда в силу (1.4.30)

$$\sup_{t \geq 0} \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_2 \ll_{r,s} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \quad (2.2.12)$$

Из (2.2.11) и (2.2.12) опять же пользуясь неравенством (1.4.28) при $2 \leq \nu \leq \infty$ получим

$$\|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_\nu \leq \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_2^{\frac{2}{\nu}} \|U_{2,N}(t, \cdot, f)\|_\infty^{1-\frac{2}{\nu}} \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-\frac{1}{\nu})}}{2^{n(r-1+\frac{1}{\nu})}}. \quad (2.2.13)$$

В итоге из (2.2.5)-(2.2.7), (2.2.10), (2.2.13) и (2.2.4), (1.4.20) для всех $f \in E_s^r$ имеем

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot, f) - (T_N^{(0)} f)(t, \cdot)\|_\nu \ll_{r,s,\nu} \frac{n^{(s-1)(1-\frac{1}{\nu})}}{2^{n(r-1+\frac{1}{\nu})}} \ll_{r,s,\nu} \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1+\frac{1}{\nu}}}.$$

Тем самым, утверждение 1) теоремы 6 доказано.

Докажем утверждение 2) теоремы 6. Пусть в (2.2.5) функция $f(x)$ принадлежит классу $SW_2^r(0, 1)^s$ ($r > 1/2$). Оценим сверху $U_{1,N}(t, x, f)$. Учтывая (1.4.33) в силу определения класса $SW_2^r(0, 1)^s$ из равенства (2.2.6) получим

$$\begin{aligned} U_{1,N}(t, x, f) &= \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) \right) e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t} = \\ &= \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{m \in \rho(\tau)} \left(- \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau} + m)}(uA_{n,\tau} + m) \left(\overline{uA_{n,\tau} + m} \right)^{-r} e^{\frac{\pi i r}{2} \left(\sum_{k=1}^s \text{sign}(uA_{n,\tau} + m)_k \right)} \right) e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t}, \end{aligned}$$

где через $j(uA_{n,\tau} + m)$ обозначен набор индексов j_1, j_2, \dots, j_n ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq s$) отличных от нуля компонент вектора $uA_{n,\tau} + m$. Отсюда, применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$\begin{aligned} &|U_{1,N}(t, x, f)| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left| \hat{\varphi}_{j(uA_{n,\tau} + m)}(uA_{n,\tau} + m) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \in \rho(\tau)} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}} \left(\overline{uA_{n,\tau} + m} \right)^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Далее, повторяя без изменения те же выкладки, которые были использованы при получении соотношения (1.4.35) из соотношения (1.4.34), получим оценку

$$|U_{1,N}(t, x, f)| \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \quad (2.2.15)$$

Оценим теперь $U_{2,N}(t, x, f)$ в (2.2.5). Из (2.2.7) учитывая определение класса $SW_2^r(0, 1)^s$ и равенство (1.4.33)

$$U_{2,N}(t, x, f) = \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)}$$

$$= \sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} \hat{\varphi}_{j(m)}(m) (\overline{m})^{-r} e^{\frac{\pi i r}{2} \sum_{j=1}^s \text{sign}(m_j)} e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t},$$

где через $j(m)$ обозначен набор индексов j_1, j_2, \dots, j_n ($1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq s$) отличных от нуля компонент вектора $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$. Отсюда применяя неравенство Коши-Буняковского получим

$$|U_{2,N}(t, x, f)| \leq \left(\sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} |\hat{\varphi}_{j(m)}(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \in Z^s \setminus \bigcup_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \rho(\tau)} (\overline{m})^{-2r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, повторяя без изменения те же выкладки, которые использовались при получении соотношения (1.4.36), получим

$$|U_{2,N}(t, x, f)| \ll_{r,s} \frac{n^{\frac{s-1}{2}}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}}. \quad (2.2.16)$$

В итоге, из (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7), (2.2.15) и (2.2.16)

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot, f) - (T_N^{(0)} f)(t, \cdot)\|_{\infty} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(r-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (2.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot, f) - (T_N^{(0)} f)(t, \cdot)\|_{\infty} \ll_{r,s} \frac{\ln^{(r+\frac{1}{2})(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}}.$$

Тем самым, утверждение 2 теоремы 6 доказана.

Приступим к доказательству утверждения 3) теоремы 6. Поскольку при $1 \leq \theta < \infty$ имеет место вложение $B_{2,\theta}^r(0, 1)^s \subset B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)^s$, то утверждение 3) достаточно доказать для класса Никольского $B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)^s$. Пусть в (2.2.5) функция $f(x)$ принадлежит классу $B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)^s$ ($r > 1/2$). Сперва оценим сверху $U_{1,N}(t, x, f)$. Из (2.2.6) в силу абсолютной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ следует равенство ($t > 0, x \in R^s$)

$$U_{1,N}(t, x, f) = - \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{u \in Z^s \setminus \{0\}, m \in \rho(\tau)} \hat{f}(uA_{n,\tau} + m) e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t}.$$

Далее, аналогично (1.4.38), преобразуя правую часть последнего равенства получим

$$U_{1,N}(t, x, f) = - \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^7 p_{n-\|\tau\|}}}} \int_{[0,1]^s} \Delta_{h(\tau,\lambda)}^{[r]+2} f(y) P_{\lambda,\tau}(t, x, y) dy, \quad (2.2.17)$$

где

$$\Delta_{h(\tau,\lambda)}^{[r]+2} f(y) \equiv \sum_{l=0}^{[r]+2} (-1)^{[r]+2-l} C_{[r]+2}^l f(x + lh(\tau,\lambda)), \quad (2.2.18)$$

$$h(\lambda,\tau) = 2^{-(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0}) - 4} \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{j_0} (\tau_{j_0} + \lambda_{j_0} = \max_{1 \leq j \leq s} (\tau_j + \lambda_j)), \quad (2.2.19)$$

$$P_{\tau,\lambda}(t, x, y) = \sum_{\substack{u \in Z^s, m \in \rho(\tau): uV \\ p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)} \in \rho(\lambda)}} a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau} + m) e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t - 2\pi i(uA_{n,\tau} + m, y)}, \quad (2.2.20)$$

$$a_{\tau,\lambda}(\sigma) = (e^{2\pi i \sigma_j 0} 2^{-(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0}) - 4, \tau} - 1)^{-[r]-2} (\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s) \in R^s). \quad (2.2.21)$$

Следовательно,

$$|U_{1,N}(t, x, f)| \leq \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \left\| \Delta_{h(\tau,\lambda)}^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_2 \|P_{\lambda,\tau}(t, x, \cdot)\|_2. \quad (2.2.22)$$

В силу определения класса $B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)$ (см. также (2.2.19))

$$\left\| \Delta_{h(\tau,\lambda)}^{[r]+2} f(\cdot) \right\|_2 \leq |h(\tau,\lambda)|^r \leq 2^{-r(\tau_{j_0} + \lambda_{j_0})} \quad (2.2.23)$$

Теперь в (2.2.18) оценим сверху $\|P_{\lambda,\tau}(t, x, \cdot)\|_2$ ($x \in R^s$). Имеем

$$\begin{aligned} \|P_{\tau,\lambda}(t, x, \cdot)\|_2^2 &= \sum_{\substack{u \in Z^s, m \in \rho(\tau): uV \\ p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)} \in \rho(\lambda)}} |a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau} + m)|^2 e^{-8\pi^2(m,m)t} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{u \in Z^s, m \in \rho(\tau): uV \\ p_{n-\|\tau\|}, a_2^{(n-\|\tau\|)}, \dots, a_s^{(n-\|\tau\|)} \in \rho(\lambda)}} |a_{\tau,\lambda}(uA_{n,\tau} + m)|^2 \equiv \|P_{\lambda,\tau}(x, \cdot)\|_2^2, \end{aligned}$$

где $P_{\lambda,\tau}(x, y)$ определен равенством (1.4.41). Тогда в силу (1.4.46)

$$\|P_{\lambda,\tau}(t, x, \cdot)\|_2^2 \leq \frac{2^{\|\lambda\| + \|\tau\|} (n - \|\tau\|)^{\gamma+2}}{2^{n-\|\tau\|}}. \quad (2.2.24)$$

В итоге, из (2.2.22), (2.2.23) и (2.2.24) следует

$$\begin{aligned} |U_{1,N}(t, x, f)| &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-r(\lambda_{j_0} + \tau_{j_0})} \frac{2^{\frac{\|\lambda\| + \|\tau\|}{2}} (n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} \ll_{s,r} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} 2^{-\frac{r(\|\lambda\| + \|\tau\|)}{s}} \frac{2^{\frac{\|\lambda\| + \|\tau\|}{2}} (n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} \ll_{s,r} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{(n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\| + \frac{n-\|\tau\|}{2} - \frac{\|\tau\|}{2}}} \sum_{\substack{\lambda \in Z^s: \\ \lambda_j > 0, 2^{\|\lambda\|} \geq \frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}}}} \frac{1}{2^{\frac{r}{s}(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})\|\lambda\|}} \ll_{s,r} \\ &\ll_{r,s} \sum_{\substack{\tau \in Z^s: \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{(n - \|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\| + \frac{n-\|\tau\|}{2} - \frac{\|\tau\|}{2}}} \left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}} \right)^{-(\frac{r}{s} - \frac{1}{2})} \ln^{s-1} \left(\frac{p_{n-\|\tau\|}}{c_0 \ln^\gamma p_{n-\|\tau\|}} \right), \end{aligned}$$

далее продолжим с учетом (1.4.22) и (1.4.21):

$$\begin{aligned}
 &<<_{r,s} \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{\gamma+2}{2}}}{2^{\frac{r}{s}\|\tau\| + \frac{n-\|\tau\|}{2} - \frac{\|\tau\|}{2}}} \frac{(n-\|\tau\|)^{(\gamma+2)(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})+s-1}}{2^{(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})(n-\|\tau\|)}} = \\
 &= \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| < n} \frac{(n-\|\tau\|)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-\|\tau\|}{2}}} = \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| = k} 1 <<_s \\
 &<<_s \frac{1}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} k^{s-1} <<_s \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{(n-k)^{\frac{(\gamma+2)r}{s}+s-1}}{2^{\frac{n-k}{2}}} <<_s \\
 &<<_{r,s,\gamma} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{1,N}(t, x, f)| <<_{r,s,\gamma} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}},$$

или в пересчете на число узлов N (см. (2.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{1,N}(t, x, f)| <<_{r,s,\gamma} \frac{\ln(\frac{r}{s} + \frac{1}{2})(s-1) N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}. \tag{2.2.25}$$

Оценим теперь $\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{2,N}(t, x, f)|$ в (2.2.5). Из (2.2.7) следует, что

$$\begin{aligned}
 U_{2,N}(t, x, f) &= \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \int_{[0,1]^s} f(y) \sum_{m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t - 2\pi i(m,y)} dy = \\
 &= \sum_{\tau \in Z^s : \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} \int_{[0,1]^s} \Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(y) \dots P_\tau(t, x, y) dy, \tag{2.2.26}
 \end{aligned}$$

где

$$h^\tau = 2^{-\tau_{j_0}-4} \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{j_0} (\tau_{j_0} = \max_{1 \leq j \leq s} (\tau_j)), \tag{2.2.27}$$

$$P_\tau(t, x, y) = \sum_{m \in \rho(\tau)} (e^{-2\pi i m_{j_0} \cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}} - 1)^{-[r]-2} e^{2\pi i(m,x) - 4\pi^2(m,m)t - 2\pi i(m,y)}. \tag{2.2.28}$$

В (2.2.28) для каждого τ оценим отдельно $\|\Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(\cdot)\|_2$ и $\|P_{\tau, j_1, \dots, j_s}(x, y)\|_2$. В силу определения класса $B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)$ (см. также (2.2.27))

$$\|\Delta_{h^\tau}^{[r]+2} f(\cdot)\|_2 \leq |h^\tau|^r \leq 2^{-r(\tau_{j_0} + \lambda_{j_0})}. \tag{2.2.29}$$

Из (2.2.28) следует

$$\begin{aligned}
 \|P_\tau(t, x, \cdot)\|_2^2 &\leq \sum_{m \in \rho(\tau)} \left| e^{-2\pi i m_{j_0} \cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}} - 1 \right|^{-2l} = \sum_{m \in \rho(\tau)} 2^{-2([r]+2)} \left| \sin(\pi m_{j_0} \cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}) \right|^{-2([r]+2)} = \\
 &= \sum_{m \in \rho(\tau)} 2^{-2([r]+2)} \left| \sin(\pi |m_{j_0}| \cdot 2^{-\tau_{j_0}-4}) \right|^{-2([r]+2)} \leq \sum_{m \in \rho(\tau)} 2^{-2([r]+2)} \left| \sin(\pi 2^{-5}) \right|^{-2([r]+2)} <<_{r,s} \\
 &<<_{r,s} \sum_{m \in \rho(\tau)} 1 <<_{r,s} \text{card} \rho(\tau) <<_{r,s} 2^{\|\tau\|},
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\|P_\tau(t, x, \cdot)\|_2 <<_{r,s} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}}. \tag{2.2.30}$$

Наконец, из (2.2.26), (2.2.29) и (2.2.30) получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{2,N}(t, x, f)| &\ll_{r,s} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} 2^{-r\tau_{j_0}} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}} \leq \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\| \geq n} 2^{-\frac{r\|\tau\|}{s}} 2^{\frac{\|\tau\|}{2}} = \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})k} \sum_{\tau \in Z^s: \tau_j > 0, \|\tau\|=k} 1 \ll_s \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})k} k^{s-1} \ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}} \\ \sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{2,N}(t, x, f)| &\ll_{r,s} \frac{n^{s-1}}{2^{n(\frac{r}{s}-\frac{1}{2})}}, \end{aligned}$$

или в пересчете на число узлов N (см. (2.4) и (1.4.20)),

$$\sup_{t \geq 0} \sup_{x \in [0,1]^s} |U_{2,N}(t, x, f)| \ll_{r,s} \frac{\ln(\frac{r}{s} + \frac{1}{2})(s-1) N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}. \quad (2.2.31)$$

В итоге, из (2.2.5), (2.2.25) и (2.2.31) следует

$$\sup_{f \in H_2^r(0,1)^s} \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot, f) - (T_N^{(0)} f)(t, \cdot)\|_{\infty} \ll_{r,s} \frac{\ln(\frac{r}{s} + \frac{1}{2})(s-1) N}{N^{\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 6 полностью доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть F - есть некоторый класс 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье. В силу начального условия (2.2) имеем

$$\begin{aligned} &\inf_{\xi^{(k)} \in [0,1]^s} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in F} \sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot, f) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), t, \cdot)\|_{\nu} \geq \\ &(k = 1, 2, \dots, N) \\ &\geq \inf_{\xi^{(k)} \in [0,1]^s} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in F} \|u(0, \cdot, f) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), 0, \cdot)\|_{\nu} \equiv \\ &(k = 1, 2, \dots, N) \\ &\equiv \inf_{\xi^{(k)} \in [0,1]^s} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in F} \|f(\cdot) - \varphi_N(f(\xi^{(1)}), f(\xi^{(2)}), \dots, f(\xi^{(N)}), \cdot)\|_{\nu}. \\ &(k = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

Отсюда поочередно полагая $F \equiv E_s^r$ и $F \equiv SW_2^r(0,1)$ из утверждений 1) и 2) теоремы 4 получим соответственно утверждения 1) и 2) теоремы 7. Полагая $F \equiv B_{2,\theta}^r(0,1)$ из (??) получим утверждение 3) теоремы 7. Теорема 7 полностью доказана.

Доказательство теоремы 8. Оценка сверху доказана в теореме 6. Оценка снизу следует из теоремы 5. Теорема 8 доказана.

Заключение. В данной статье изложены совершенно иные вычислительные агрегаты восстановления функций и решений уравнений в частных производных со свойствами неуплощаемости в степенной шкале, нежели утвердившиеся в современной математике, а также решены смежные задачи, имеющие самостоятельное значение.

Список литературы

- 1 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems// Journal of Complexity. -2022. Vol. 71. -P. 101653.
- 2 Temlyakov V., Ullrich T. Bounds on Kolmogorov widths and sampling recovery for classes with small mixed smoothness// Journal of Complexity. -2021. Vol. 67. -P. 101575.
- 3 Temlyakov V. Multivariate Approximation. Cambridge University Press, 2018. 551 p.
- 4 Сборник трудов Международной научной и научно-методической конференции «Математика, Компьютерные науки и цифровые технологии в преподавании и в научных исследованиях», посвященной 75-летию юбилею Математика Нурлана Темиргалиева, 7-10 декабря 2022. Уральск. ??? стр.

- 5 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье//Вестник Евразийского университета - 1997. № 3. -С. 90-144.
- 6 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вест. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л. Н. Гумилева - 2010. -С. 1-194
- 7 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. ИТМиНВ. Астана - 2012. -С. 1-259.
- 8 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. Институт теоретической математики и научных вычислений. Астана (постоянно дополняемый по новым результатам и соответственно по новым и уточняемым постановкам задач). Астана -2018.
- 9 Н. Темиргалиев, А. Жубанышева Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. -Т. 124. -№3. -С. 8-88.
- 10 Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. -Москва: Физматгиз, 1963.
- 11 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. ВУЗов. Математика - 2013. №8. -С. 86-93.
- 12 Темиргалиев Н. Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона// Вестник Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т. 123. -№2. -С. 8-57.
- 13 Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607.00950 [math. NA].
- 14 Кнут Д. Э. Искусство программирования для ЭВМ, том 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Издательство "Мир", 1977. – 784 с. (Пер. с англ. Г. П. Бабенко, Э. Г. Белаги и Л. В. Майорова, под ред. К. И. Бабенко: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Semi numerical Algorithms, Publisher: Addison-Wesley, 1969).
- 15 Кнут Д. Э. Искусство программирования, том 2. Получисленные алгоритмы. –М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. – 832 с. (Пер. с англ. под общей редакцией Ю. В. Козаченко: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3 rd Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998).
- 16 Воронин С. М. , Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел //Матем. заметки - 1989. -Т. 46. №2. -С. 34-41
- 17 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенному восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных //Докл. АН СССР -1990. -Т. 310. №5. -С. 1050-1054.
- 18 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. - 1990. -Т. 281. №4. -С. 490-505.
- 19 Темиргалиев Н. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях //Матем. заметки - 1997. №2. -С. 297-301.
- 20 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН - 2007. -Т. 416. №2. -С. 169-173.
- 21 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж. Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики - 2009. -Т. 49. №1. -С. 14-25.
- 22 Сихов М., Темиргалиев Н. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет. -2010. -Т. 87. №6. С.948-950.
- 23 Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики - 2014. -Т. 54. № 7. -С. 1059-1077.
- 24 Шерниязов К.Е. О приближенном восстановлении функций из классов и решений уравнения теплопроводности// Материалы международной конференции, посвященной 75-летию академика АН РК А.Т. Лукьянова. Алматы. -1996. 17-18 апреля. -С. 235-237.
- 25 Шерниязов К.Е. Оптимальные в степенной шкале порядки погрешности приближенного восстановления решения уравнения теплопроводности с начальными функциями распределения температур из классов E и SW //Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. -1998. -№9. -С. 198-215.
- 26 Шерниязов К.Е. Восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с распределениями начальных температур из классов E , SW и SH //Вестник КазГУ. Серия математика, механика, информатика. -1998. -№11. -С. 98-108.

- 27 Шерниязов К.Е. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E , SW и B : // Дис... канд. физ.- мат. наук. Алматы. 1998.
- 28 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -Москва: Издательство "Наука", 1976. -543 стр.
- 29 Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. -Москва: Мир, 1965.
- 30 Кудрявцев С.Н. Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек//Изв. РАН. Сер. матем. -1998. -Т. 62. №1. -С. 21–58.
- 31 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной//Тр. МИАН СССР. -1986. -Т. 178. -С. 3–113.

Қ.Е. Шерниязов

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, әл-Фараби даңғ., 71/23, Алматы, Қазақстан

Функция мен дербес туындылы теңдеу шешімдерін аса тығыздалған ақпаратты қасиетке ие Коробов торының сызықты комбинациялары арқылы құрылған есептеу агрегаттарымен жуықтап қалпына келтірудің оптималь әдістері және олармен іргелес мәселелер

Аннотация: Екі оң бүтін сан арқылы анықталатын $N.M.$ Коробов түйіндерінен (s өлшемді Евклид кеңістігіндегі нүктелер) құрылған тор ақпараттың аса тығыздалуының таңқаларлық мысалдарының бірі. Салмақтары бірдей және түйіндері осы аталған тор болатын квадратуралық формулалар санды интегралдауда оптималь дерлік болатынына қарамастан, функцияларды қалпына келтіру есебінде, кем дегенде, бұл торлар оптимальді жағдайдан квадрат есе нашар нәтижелер береді (Теорема 2).

Осыған орай, туындаған "Коробов торының жақсы қасиеттерін қалпына келтіру есебіне пайдалануға бола ма, болса қалай?" деген сұраққа бұл мақалада оң жауап алынған. Дәлірек айтсақ, көп айнымалылы функциялар мен олардың еселі Фурье қатарының түрлендірулерін (оган кейбір дербес туындылы теңдеулер шешімдері де жатады) қалпына келтіруде Есептеу математикасында, Сандық анализде және Жуықтаулар теориясында қиын кластар санатына жататын доминант аралас туындысы (аралас айырымы) арқылы анықталатын кеңістіктерде оптималь болатын және Кробов торынан айқын түрде ақырлы сызықтық түрлендірулер арқылы алынатын жаңа торлар мен сәйкес операторлар құрылды (Теорема 3 және 5).

Бұл есептерді шешу барысында Дискрет математикада өз алдына орын алатын, сапасы жағынан маңыздылығы бұл жердегіден кем емес басқа да мәселелерге қолданылуы мүмкін нәтижелер алынды. Атап айтсақ, қолданылу спектрі кең бұрыннан белгілі әйгілі нәтижелер қатарына бір өлшемді решетканың характеристикалық функциясының бірқалыпты тор түйіндері арқылы өрнектелуі жататын болса, автор бұл мақалада көп өлшемді Евклид кеңістіктеріндегі кез келген толық бүтін мәнді решетканың характеристикалық функциясының решетка матрицасы арқылы өрнектелу формуласын тапқан (Лемма 1.2.3).

Мақаладағы тағы да бір қызықты нәтижелердің бірі - салыстырым есебінің шешімдерінің айқын түрінің табылуы (Лемма 1.2.5). Бұндай салыстырым есептері дискрет математиканың көптеген есептерінде кездеседі. Солардың қатарында көптеген жылдар бойы шешілмей, Д. Кнуттың "Искусство программирования" атты әйгілі кітабының барлық басылымдарында қарастырылып келген және 2016 жылы Н.Темірғалиевтің еңбегінде толық шешімін тапқан, Ковью-Макферсон тесті бойынша кездейсоқ сандарды құрудың сызықтық конгруэнтті генераторы.

Алайда, автордың 1999 жылы қорғалған Кандидаттық Диссертациясына кірген бұл және де көптеген нәтижелер бұған дейін Қазақстандық конференциялар тезистерінде хабарланып, тек қана екі мақалада қысқаша ішінара дәлелімен жарияланған болатын. Сонымен, аталған диссертацияның барлық нәтижелері Халықаралық математикада назардан тыс қалып келді.

Осы олқылықтың орны ұсынылып отырған мақалада толық қалпына келтіріліп отыр.

Түйін сөздер: функцияларды жуықтау, жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімдерін жуықтау, жуықтау операторлары, бүтінмәнді тор, Коробов торлары, ақпараттың сығылуы.

K. Sherniyazov

Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi ave., 71/23, Almaty, Kazakhstan

Optimal methods for approximate recovery of functions and solutions of partial differential equations by computational units by linear combinations of Korobov grids with information supercompression and related issues

Abstract: An amazing example of information supercompression is Korobov grids (points in the Euclidean space of arbitrary dimension s), which are determined by two positive integers, one of which is the number of nodes. As it turned out, quadrature formulas with equal weights and Korobov grid are almost optimal in the problem of numerical integration, while in problems of recovery of functions, at least, square times worse than optimal (Theorem 2).

Thus, the following question arises "Is it possible, if possible, how to use the highest quality of Korobov meshes in recovery problems", he himself received a positive answer in the problems of restoration of functions and transformations of their multiple trigonometric Fourier series, in particular, containing solutions of equations in partial derivatives, in classes of functions that are difficult in Computational Mathematics, Numerical Analysis and Approximation Theory with dominating mixed derivative and difference. Namely, grids were constructed that are explicitly linear combinations of the original Korobov grids, which retain the properties of their overcompression in computational practice (Theorems 3, 5, 6, and 8).

In the process of solving these problems, various results of independent significance in discrete mathematics were obtained, in terms of the quality of the applications incorporated in them, perhaps even no less than what was achieved

with their help. If characteristic functions of one-dimensional lattices are among the well-known ones with a wide range of applications, then the author constructed their characteristic functions in Euclidean spaces of any dimension for arbitrary lattices with integer nondegenerate master matrices (Lemma 1.2.3).

Another result in this series are explicit congruence solutions (Lemma 1.2.5) that arise in many problems of discrete mathematics, among which are Linear congruential generators for constructing random numbers using Coway-MacPherson tests, which, with all the efforts in Computer Science, did not yield to solutions in for almost half a century, the course of the search for which was constantly covered in all editions of the monograph "The Art of Programming" by Donald Knuth, included in the list of 12 highest publications of the physical and mathematical cycle in the 20th century, with the closure of the problem in 2016 by N. Temirgaliyev.

However, all these results, and by no means only, that were included in the author's Ph.D thesis.

Thus, all the results of the Dissertation were ignored in International Mathematics, which is restored with full proofs in this article.

Keywords: recovery of functions, recovery of solutions of the heat equation, recovery operators, integer lattice, Korobov grids, information overcompression.

References

- 1 Kashin B., Kosov E., Limonova I., Temlyakov V. Sampling discretization and related problems, Journal of Complexity. 2022. Vol. 71. P. 101653.
- 2 Temlyakov V., Ullrich T. Bounds on Kolmogorov widths and sampling recovery for classes with small mixed smoothness, Journal of Complexity. 2021. Vol. 67. P. 101575.
- 3 Temlyakov V. Multivariate Approximation. Cambridge University Press, 2018. 551 p.
- 4 Sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj i nauchno-metodicheskoj konferencii «Matematika, Komp'yuternye nauki i cifrovye tekhnologii v prepodavanii i v nauchnyh issledovaniyah», posvyashchennoj 75-letnemu yubileyu Matematika Nurlana Temirgalieva[Proceedings of the International scientific and scientific-methodical conference "Mathematics, Computer Science and Digital Technologies in Teaching and Scientific Research", dedicated to the 75th anniversary of Mathematician Nurlan Temirgaliev]. December 7-10, 2022. Uralsk. ??? page
- 5 Temirgaliyev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Numerical-theoretic methods and the probability-theoretic approach to the problems of the Analysis. The theory of embeddings and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Vestnik Evrazijskogo universiteta [Bulletin of the Eurasian University]. 1997. №3. P. 90-144.
- 6 Temirgaliyev N. Komp'yuternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaia teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series], Vest. ENU im. L.N.Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilev ENU]. 2010. P. 1-194.
- 7 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV [Electronic edition. IThMandSC]. Astana. 2012. P.1-259.
- 8 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV. (postojanno dopolnjaemyj po novym rezul'tatam i sootvetstvenno po novym i utocnjaemyj postanovkam zadach – iz-za laviny rezul'tatov poslednih let vse vremja otodvigaemyj) [Electronic edition. IThMandSC. (constantly supplemented by new results and accordingly on new and more refined statements of problems - because of the avalanche of the results of recent years)]. Astana. 2018.
- 9 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series. 2018. Vol. 124. №3. P. 8-88.
- 10 Korobov N.M. Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize[Number-theoretic methods in approximate analysis](Fizmatiz, Moscow, 1963).
- 11 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2013. Vol. 57. №8. P. 75-80.
- 12 Temirgaliyev N. Elementary construction of the linear congruent Lehmer sequence with the degree of randomness that is required by the spectral test of Coveyou and MacPherson, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics series. 2018. Vol. 123. №2. P. 8-55.
- 13 Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607.00950 [math. NA].
- 14 Knut D. E. Iskusstvo programmirovaniya dlya EVM, tom 2. Poluchislennyye algoritmy. Moscow: Izdatel'stvo "Mir", 1977. 784 s. (Per. s angl. G. P. Babenko, E. G. Belagi i L. V. Majorova, pod red. K. I. Babenko: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Semi numerical Algorithms, Publisher: Addison-Wesley, 1969).

- 15 Knuth D. Iskusstvo programmirovaniya dlya EHVМ. Poluchislennyye algoritmy. 3rd vol. (Izdatel'skiy dom "Vil'yams", Moscow, 2001, 832 p.) [in Russian] (Translated in edition YU.V. Kozachenko: Knuth D. The art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, 3rd Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998).
- 16 Voronin S.M., Temirgaliev N. Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers, Mat. zametki, 1989. Vol. 46. №2. P. 597-602.
- 17 Temirgaliev N. Primenenie teorii divizorov k priblizhennym vosstanovleniyu i integrirvaniyu periodicheskikh funktsiy mnogih peremennykh [Application of divisor theory to recovery and numerical integration of periodic functions of several variables], Dokl. AN SSSR [Doklady Akademii Nauk SSSR]. 1990. Vol. 310. №5. P. 1050-1054.
- 18 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik. 1990. Vol. 69. №2. P. 527-542.
- 19 Temirgaliev N. Efficiency of Numerical Integration Algorithms Related to Divisor Theory in Cyclotomic Fields, Mat. notes. 1997. Vol. 61. №2. P. 242-245.
- 20 Bailov E.A., Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Doklady Akademii Nauk SSSR, 2007, pp. 681-685.
- 21 Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N., Temirgalieva Zh. N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics. 2009. Vol. 49. №1. P. 12-22.
- 22 Sikhov M.B., Temirgaliev N. On an algorithm for construction uniformly distribution Korobov grids, Mathematical notes. 2010. Vol. 87. №. 6. P. 916-917.
- 23 Bailov E.A., Sikhov M.B., Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. №7. P. 1061-1078.
- 24 Sherniyazov K.E. O priblizhennom vosstanovlenii funktsiy iz klassov i resheniy uravneniya teploprovodnosti, [On the approximate recovery of functions from classes and solutions of the heat equation], Materialy mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy 75-letiyu akademika AN RK A.T. Luk'yanova [Proceedings of the international conference dedicated to the 75th anniversary of Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan A.T. Lukyanov]. Almaty. 1996. 17-18 April. P. 235-237
- 25 Sherniyazov K.E. Optimal'nye v stepennoj shkale poryadki pogreshnosti priblizhennogo vosstanovleniya resheniya uravneniya teploprovodnosti s nachal'nymi funktsiyami raspredeleniya temperatur iz klassov E i SW [Optimal orders of error in the power scale of approximate recovery of the solution of the heat equation with initial temperature distribution functions from the classes E and SW], Vestnik KazGU. Seriya matematika, mekhanika, informatika [Bulletin of KazGU. A series of mathematics, mechanics, computer science] 1998. №9. P. 198-215.
- 26 Sherniyazov K.E. Vosstanovlenie funktsiy i resheniy uravneniya teploprovodnosti s raspredeleniyami nachal'nykh temperatur iz klassov E , SW i SH [Reconstruction of functions and solutions of the heat equation with distributions of initial temperatures from the classes E , SW and SH], Vestnik KazGU. Seriya matematika, mekhanika, informatika. [Bulletin of KazGU. A series of mathematics, mechanics, computer science]. 1998. №11. P. 98-108.
- 27 Sherniyazov K.E. Priblizhennoe vosstanovlenie funktsiy i resheniy uravneniya teploprovodnosti s funktsiyami raspredeleniya nachal'nykh temperatur iz klassov E , SW i B [Approximate recovery of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E , SW and B]: Dis... cand. physical-mat. sciences. Almaty. 1998.
- 28 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis] (Nauka Publishing House, Moscow, 1976, 543 p.).
- 29 Kassels J. Vvedenie v geometriyu chisel [Introduction to the geometry of numbers] (Mir, Moscow, 1965).
- 30 Kudryavtsev S.N. The best accuracy of reconstruction of finitely smooth functions from their values at a given number of points, Izv. Math. 1998. Vol. 62. №1. P. 19-53.
- 31 Temlyakov V.N. Approximations of functions with bounded mixed derivative, Proc. Steklov Inst. Math. 1989. Vol. 178. P. 1-121

Сведения об авторах:

Шерниязов Кайрат – старший преподаватель, Казахский национальный университет имени Ал-Фараби, пр. аль-Фараби, 71/23, Алматы, Казахстан.

Sherniyazov Kairat – Senior Lecturer, Al-Farabi Kazakh National University, Al-Farabi ave., 71/23, Almaty, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 11.05.2022