Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 141, №4, P.42-50
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

Н. Темиргалиев, Г.Е. Таугынбаева, А.Ж.Жубанышева

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail.ru)

Формула Планшереля для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева [1]

Аннотация: Математическая теория преобразования Радона с технической реализацией в томографах имеет неограниченный спектр применений, среди которых наиболее широкими являются медицинские.

В ареале исследований преобразования Радона ключевую роль играет соотношение:

Для всякого $\beta > 0$ *существуют такие положительные константы* $c(\beta, s)$ *и* $C(\beta, s)$, *что для* $f \in C_0^\infty(\Omega_s)$

$$c(\beta, s)\|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)} \leq \|Rf\|_{W^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}(Z=S^{s-1}\times R^1)} \leq C(\beta, s)\|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)}.$$

Данная статья посвящена распространению этой эквивалентности в формате равенства на далеко идущий случай переформатированных гильбертовых пространств Соболева.

Ключевые слова: преобразование Радона, гибкая шкала гильбертовых пространств Соболева, Компьютерная томография, формула Планшереля для преобразования Радона, обобщенная формула Решетняка.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/4.3

2000 Mathematics Subject Classification: 41A99

Введение. Это нечастое соединение прямой математической теории с практикой жизни с вполне понятным желанием без разрушения оболочки увидеть внутренность тела привело к глубоким выводам общего характера, высказанные на праздновании 100-летия выдающейся 16-страничной статьи [1] Иогана Радона (цитируется по [2-3]):

Весьма компетентное лицо, а именно Бертран Рассел, сказал: "Математика может быть определена как доктрина, в которой мы никогда не знаем, ни о чем говорим, ни того, верно ли то, что мы говорим"».

Именно в этом ключе происходили события, вызванные изобретением техники, позволяющей при просвечивании материального объекта по разности интенсивности луча на входе и выходе получить равным интегралу функции распределения плотности вещества вдоль траектории луча, с весьма точными описаниями на научном собрании «**Инновации через фундаментальные исследования. Вклад научных теорий и открытий в прогресс общества в целом (Венский университет, 2016 год)**

Ректор Венского университета (на примере И. Радона): *«Часто вещи таковы, что математические теории находятся в абстрактной форме, возможно, рассматриваются как стерильные уловки, которые внезапно оказываются ценными инструментами для физических знаний и, таким образом, неожиданно раскрывают их скрытую силу».*

Карл Зигмунд: «Иоган Радон исследовал абстрактные проблемы так называемой чистой математики и понятия не имел, что сегодня преобразование Радона является

[1] Статья выполнена в рамках Грантового финансирования МНВО, проект № AP09260484

основой компьютерной томографии. Их многочисленные приложения подтверждают правило: нет ничего более практичного, чем хорошая теория».

В данной статье получено равенство норм преобразования Радона Rf в им самим данной форме и требующей нахождения по ней функции f в шкале гильбертовых пространств Соболева

$$\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(Z=S^{s-1}\times R^1\right)}=\sqrt{2}\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)},$$

содержащее как известные, так и новые соотношения такого типа.

Следует отметить, что решение этой задачи естественным образом потребовало переход от гильбертовых пространств Соболева, скажем так, степенного типа к произвольным. Для авторов ведущей идеей в таком подходе служили теоремы вложения П.Л. Ульянова [4], в которых известные классы функций степенной гладкости были распространены на гладкость произвольную с установлением их неулучшаемости.

Не исключено, что приведенного сорта новые типы Соболевских гильбертовых пространств, наряду с другого склада классами Соболева-Морри [5-6], могут служить получению результатов в ряду известных и новых.

Обозначения. Всюду в статье будем пользоваться следующими обозначениями:

$R^s=\{(x_1,...,x_s):x_1\in R,...,x_s\in R\}$ - s-мерное евклидово пространство, где R поле действительных чисел и $s=1,2,\ldots$.

$x\cdot y=x_1y_1+...+x_sy_s=\langle x,y\rangle$ - скалярное произведение векторов $x=(x_1,...,x_s)$ и $y=(y_1,...,y_s)$ из R^s.

Ω_s - единичный шар в R^s.

$E_s=\left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right]^s$ – единичный куб в R^s с центром в начале координат.

$\theta=(\theta_1,...,\theta_s)\in R^s,\theta_1^2+...+\theta_s^2=1$ - единичный вектор в R^s.

$S^{s-1}=\left\{(x_1,...,x_s)\in R^s:x_1^2+...+x_s^2=1\right\}$ – единичная сфера в R^s.

$S^{s-1}\times R^1\equiv\left\{(\theta_1,...,\theta_s,\tau)\in R^{s+1}:\theta_1^2+...+\theta_s^2=1,-\infty<\tau<\infty\right\}$ – единичный цилиндр в R^{s+1}.

$\overrightarrow{ab}$ обозначает вектор в R^s с началом в точке $a=(a_1,...,a_s)$ и концом в точке $b=(b_1,...,b_s)$ с координатами $(b_1-a_1,...,b_s-a_s)$.

R_x^{s-1} - гиперплоскость, состоящая из всех точек $y\in R^s$ таких, что вектора $\overrightarrow{0x}$ и $\overrightarrow{xy}$ перпендикулярны $\langle x,\,y-x\rangle=0$ и проходящая через точку x.

$R_{t\theta}^{s-1}$ – гиперплоскость размерности $s-1$, перпендикулярная вектору $t\theta$ и проходящая через точку $t\theta$.

$R_+^1\equiv[0,\,+\infty)$ – множество всех неотрицательных действительных чисел.

$A<<B(B\geq 0)$ означает $|A|\leq cB$.

$A\succ\prec B(A\geq 0,B\geq 0)$ – знак эквивалентности означает одновременное выполнение $A<<B$ и $B<<A$.

$A=B$ – знак равенства, в отдельных случаях по вполне понятным обстоятельствам будет пониматься в смысле эквивалентности.

$\hat{f}$ и $\tilde{f}$ - преобразования Фурье функции f, прямое и обратное соответственно:

$$\hat{f}\left(y\right)=\int_{R^s}f\left(x\right)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx,\tilde{f}\left(y\right)=\int_{R^s}f\left(x\right)e^{2\pi i\langle y,x\rangle}dy.$$

$suppf$ - носитель заданной на R^s числовой функции f есть наименьшее замкнутое множество пространства R^s, вне которого f тождественно равна нулю.

$C_0^\infty(\Omega)-$ множество, состоящее из всех определенных на R^s бесконечно дифференцируемых функций с носителем из открытого множества Ω.

Необходимые определения. По всему тексту статьи предполагается, что все рассматриваемые функции измеримы по Лебегу на измеримом множестве своего задания, интеграл всюду понимается в смысле Лебега. Вместе с тем будет предполагаться, что излишне строгие условия на функции могут быть ослаблены, лишь бы проводимые действия над ними были корректными и законными.

Преобразование Радона ([7, Глава I, 1]). Пусть функция $f(x)$ принадлежит пространству Шварца на R^s, т.е. бесконечно дифференцируемых на R^s функций, для которых норма

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{x=(x_1,\dots,x_s)\in R^s} \left| x_1^{k_1}\dots x_s^{k_s} \frac{\partial f^{l_1+\dots+l_s}}{\partial x_1^{l_1}\dots \partial x_s^{l_s}}(x_1,\dots,x_s)\right|$$

конечна для всех мультииндексов $k = (k_1,\dots,k_s)$ и $l = (l_1,\dots,l_s)$ с целыми неотрицательными компонентами.

Преобразованием Радона называют функцию

$$\breve{f}(x) \equiv Rf\,(x) = \int_{y\in R_x^{s-1}} f(y)dy,$$

где $x \in R^s$, R_x^{s-1} есть гиперплоскость размерности $s-1$, проходящая через точку x перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{0x}$, соединяющего точки 0 и x.

То же в других терминах: преобразование Радона (s-мерное) функции $f(x)$, заданной на Евклидовом пространстве R^s с носителем $suppf$ из открытого множества $\Omega \subset R^s$, каждой гиперплоскости $R_{t\theta}^{s-1}$ размерности $s-1$ перпендикулярной к вектору $t\theta$, $\theta := (\theta_1,\dots,\theta_s) \in R^s$, $\theta_1^2+\dots+\theta_s^2 = 1$, $-\infty < t < \infty$ и проходящей через точку $t\theta$, ставит в соответствие интеграл по ней

$$Rf\,(\theta,t) \equiv Rf\,(\theta_1,\dots,\theta_s;t) = Rf\,(t\theta) = \int_{x\in\Omega:\langle x,\theta\rangle = t} f(x)dx = \int_{y\in\Omega: y\in R_{t\theta}^{s-1}} f(y)dy.$$

Пусть на множестве $R^s\backslash\{0\}$ задана неотрицательная непрерывная функция $\alpha\,(y) = \alpha\,(y_1,\dots,y_s)$ такая, что при всех фиксированных $y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_s$ выполнено

$$\lim_{y_j\to+\infty} \alpha\,(y_1,\dots,y_s) = +\infty (j=1,\dots,s).$$

Гильбертовым пространством Соболева $W_2^{\alpha(y)}\,(R^s)$ назовем множество, составленное из всех функций $f = f\,(x)$ таких, что конечен интеграл

$$\|f(x)\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} := \int_{R^s} \alpha^2\,(y) \left|\widehat{f}\,(y)\right|^2 dy < +\infty,$$

где

$$\widehat{f}\,(y) = \int_{R^s} f(x) e^{-2\pi i\langle y,x\rangle} dx. \tag{1}$$

На цилиндре $Z := S^{s-1}\times R^1$ аналогичные гильбертовы пространства Соболева $W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^1\right)$ определим как множество всех функций $g\,(\theta,t)\,(\theta\in R^s, \|\theta\| = \theta_1^2+\dots+\theta_s^2 = 1, -\infty < t < +\infty)$, для которых конечна норма ([7, Глава II.5])

$$\|g\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1}\times R^1)} = \int_{S^{s-1}}\int_{R^1} \alpha^2\,(t\theta)\,|\widehat{g}_{R^1}\,(\theta,t)|^2\, d\theta dt,$$

где

$$\widehat{g}_{R^1}\,(\theta,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(\theta,\tau)\, e^{-2\pi i t\tau} d\tau \left(\theta\in S^{s-1},\ -\infty < t < +\infty\right), \tag{2}$$

$d\theta$ - элемент объема на сфере $S^{s-1}\subset R^s$.

Для функции $g\,(\theta,t)$ вида $g\,(x) = g\,(x_1,\ldots,x_s)$, $g\,(\theta,t) \equiv g\,(t\theta)$ Определение (2) при $x = t\theta$ в развернутой записи есть

$$\widehat{g}_{R^1}\,(x) = \widehat{g}_{R^1}\,(\theta,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(\theta,\tau)\, e^{-2\pi i t\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\tau\theta_1^{(x)},\ldots,\tau\theta_s^{(x)}\right) e^{-2\pi i t\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau\theta_x) e^{-2\pi i t\tau} d\tau,$$

в котором $g\left(\tau\theta_1^{(x)},\ldots,\tau\theta_s^{(x)}\right)=g(\tau\theta_x)$, $\theta_x:=\left(\theta_1^{(x)},\ldots,\theta_s^{(x)}\right)$ из $x=t\theta_x,\theta_x=\frac{1}{t}x\left(\frac{1}{0}:=0\right)$, $(x_1,\ldots,x_s)=x=t\theta_x=\left(t\theta_1^{(x)},\ldots,t\theta_s^{(x)}\right)$.

Для открытого множества $\Omega\subset R^s$ и для всех функций $f\in W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ таких, что $suppf\subset\Omega$ положим $\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(\Omega)}:=\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}$.

Основной результат. Зададимся вопросом: при заданном $\alpha(y)$ найдется ли $\alpha_1(y)$ такое, чтобы нормы f по $\alpha(y)$ и Rf по $\alpha_1(y)$ совпадали? Ответ следующий – справедлива

Теорема. *Пусть даны целое положительное число s и на R^s задана неотрицательная непрерывная на $R^s\backslash\{0\}$ функция $\alpha(y_1,...,y_s)$, для каждого $j(j=1,...,s)$ и фиксированных $(y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_s)$ из R^{s-1} удовлетворяющая условию $\alpha(y_1,...,y_s)\to+\infty$ при $y_j\to+\infty$.*

Тогда для всякой функции f из класса $W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ справедливо равенство

$$\left\|\breve{f}\right\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}. \tag{3}$$

Следуя И.М. Гельфанду равенство (3) будем называть *формулой Планшереля для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева.*

Доказательство. Переводя интеграл от $\left(\widehat{Rf}\right)_{R^1}(\theta,t)$ с использованием равенства $\left(\widehat{Rf}\right)_{R^1}(\theta,t)=\hat{f}(t\theta)$ (из [7, Глава II.1]) по цилиндру $Z=S^{s-1}\times R^1$ к интегралу по сферам $t\theta$, $\theta\in S^{s-1}$, параметризованным числовой переменной $t\in R^1_+$ с представлением всего Евклидового пространства $R^s=\left\{t\theta:S^{s-1}\times R^1_+\right\}$, затем в нем производя замену $(x_1,...,x_s)=x=t\theta=(t\theta_1,...,t\theta_s)$, $\|x\|=\|t\theta\|=t\|\theta\|=t$ по формуле (см. также [7, Глава VII.2]): для функций $(s+1)$ переменной $\psi(\theta,t)=\psi(\theta_1,\ldots,\theta_s;t)$ вида $\psi(\theta,t)=\psi(t\theta)=\psi(t\theta_1,\ldots,t\theta_s)=\psi(x_1,\ldots,x_s)=\psi(x)$ справедливо равенство

$$\iint\limits_{S^{s-1}\times R^1_+}\psi(t\theta)\,dtd\theta=\iint\limits_{S^{s-1}\times R^1_+}\psi(t\theta)\frac{1}{\|t\theta\|^{s-1}}t^{s-1}dtd\theta=\int_{R^s}\psi(x)\frac{1}{\|x\|^{s-1}}dx, \tag{4}$$

последовательно получаем

$$\|Rf\|^2_{W_2^{\alpha_1(y)}(S^{s-1}\times R^1)}=\iint\limits_{Z=S^{s-1}\times R^1}\alpha_1^2(t\theta)\left|\left(\widehat{Rf}\right)_{R^1}(\theta,t)\right|^2d\theta dt=$$

$$=2\iint\limits_{S^{s-1}\times R^1_+}\alpha_1^2(t\theta)\left|\hat{f}(t\theta)\right|^2d\theta dt=2\int_{R^s}\alpha_1^2(x)\left|\hat{f}(x)\right|^2\frac{1}{\|x\|^{s-1}}dx.$$

Отсюда, полагая $\alpha_1(x)=\alpha(x)\|x\|^{\frac{s-1}{2}}$, приходим к искомому равенству

$$\|Rf\|^2_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=2\int_{R^s}\left(\alpha(x)\|x\|^{\frac{s-1}{2}}\right)^2\left|\hat{f}(x)\right|^2\frac{1}{\|x\|^{s-1}}dx=2\int_{R^s}\alpha^2(x)\left|\hat{f}(x)\right|^2dx=2\|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}.$$

Теорема доказана.

Приведем три следствия из этой теоремы – известные для (обычных) пространств Соболева в градации изотропные $W_2^{\beta}(R^s)$ и анизотропные $W_2^{\beta_1,\ldots,\beta_s}(R^s)$, новое для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^{\beta}(R^s)$.

Следствие 1 [7, Глава II.5]. *При $\beta>0$ для (обычного) пространства Соболева*

$$\alpha_W(y)=\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

и

$$\|f\|^2_{W_2^{\beta}(R^s)}=\int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{\beta}\left|\hat{f}(y)\right|^2dy$$

справедливо соотношение эквивалентности

$$\|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \succ\prec \|f\|_{W_2^{\beta}(R^s)}. \tag{5}$$

Следствие 2. При $\beta_1>0,...,\beta_s>0$ *для анизотропного гильбертова пространства Соболева*

$$\alpha_W(y;\beta_1,...,\beta_s)=\left(|y_1|^{2\beta_1}+...+|y_s|^{2\beta_s}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\|f\|^2_{W_2^{\beta_1,...,\beta_s}(R^s)}=\int_{R^s}\left(|y_1|^{2\beta_1}+...+|y_s|^{2\beta_s}\right)\left|\hat{f}(y)\right|^2dy$$

справедливо соотношение эквивалентности

$$\|Rf\|_{W_2^{\left(|y_1|^{2\beta_1}+...+|y_s|^{2\beta_s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y_1^2+...+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \succ\prec \|f\|_{W_2^{\beta_1,...,\beta_s}(R^s)}. \tag{6}$$

Следствие 3. При $\beta>0$ для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной

$$\alpha_{SW}(y)=\left(\prod_{j=1}^{s}\max\{|y_j|\,;1\}\right)^{\beta},$$

$$\|f\|^2_{SW_2^{\beta}(R^s)}=\int_{R^s}\left(\prod_{j=1}^{s}\left(\max\{|y_j|\,;1\}\right)^2\right)^{\beta}\left|\hat{f}(y)\right|^2dy$$

имеет место равенство

$$\|Rf\|_{SW_2^{\left(\prod_{j=1}^{s}\max\left\{\left|y_j\right|;1\right\}\right)^{\beta}\times\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\sqrt{2}\|f\|_{SW_2^{\beta}(R^s)}. \tag{7}$$

Замечание. Как показывают соотношения (5) и (7), если для пространства $W_2^{\beta}(R^s)$ равенство (3) имеет числовой переход от β к $\beta+\frac{s-1}{2}$, пространство с числовой характеристикой $SW_2^{\beta}(R^s)$ выпадает из этого числового ряда и требует введения «гибкого» гильбертового пространства Соболева, что, по-видимому, обусловлено формулой (4).

Равенства типа

$$\left\|\check{f}\right\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} \tag{3}$$

и ранее устанавливались в жестких рамках Соболевских пространств функций, выраженных в числовых параметрах (см. [8-11]), тогда как введение гибких гильбертовых пространств Соболева естественным образом определяют соответствующие пространства функций, обеспечивающих эти равенства.

Так, И.М. Гельфандом в [8] названное *формулой Планшереля для преобразования Радона*, доказанное Ю.Г. Решетняком в неопубликованной работе (приблизительно 1960 года), в [11] именуемое *Обобщенной формулой Решетняка* равенство

$$\|f\|_{H_t^r(R^s)}=\|Rf\|_{H^{r+\frac{s-1}{2}}_{t+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \tag{8}$$

содержится в (3).

Действительно, для

$$\alpha(y)=\|y\|^t\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{s-t}{2}}$$

в силу определений пространств H и W последовательно имеем

$$\|Rf\|^2_{H^{r+\frac{s-1}{2}}_{t+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} := 2\int_{S^{s-1}}\int_{R^1_+}\tau^{2t+(s-1)}(1+\tau^2)^{s-t}\left|\left(\widehat{Rf}\right)_{R^1}(\theta,\tau)\right|^2 d\theta d\tau =$$

$$= 2\|Rf\|^2_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R)} \overset{(3)}{=} 2\|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} =$$

$$= \int_{R^s}\|y\|^{2t}\left(1+\|y\|^2\right)^{r-t}\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy =: \|f\|^2_{H^r_t(R^s)},$$

что доказывает (8).

Перспективы дальнейшего развития Математической теории Компьютерной томографии, основанной на *Проекционной теореме* (также называемой *the slice theorem* - теорема о слоях) [7, Глава II.1]

$$\left(\widehat{Rf}\right)_{R^1}(\theta,t) = \hat{f}(t\theta),$$

в котором преобразование Фурье в преобразовании Радона Rf одномерное

$$\hat{g}_{R^1}(\theta,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta,\tau)\, e^{-2\pi i t\tau} d\tau \left(\theta\in S^{s-1},\ -\infty<t<+\infty\right), \tag{2}$$

тогда как преобразование Фурье искомой функции $f(x)$ смысла плотности исследуемого тела есть s-мерное:

$$\hat{f}(y) = \int_{R^s} f(x)\, e^{-2\pi i\langle y,x\rangle} dx, \tag{1}$$

никак не выражающееся через (2).

И тем вызвана необходимость определения новых "гибких" гильбертовых пространств Соболева, в продолжение известного соотношения эквивалентности

$$c(\beta,s)\|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)} \le \|Rf\|_{W^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}(Z=S^{s-1}\times R^1)} \le C(\beta,s)\|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)},$$

которое играет ключевую роль в имеющихся к настоящему времени в научной литературе достижениях по теории Компьютерной томографии.

Результат данной статьи, заключающийся в том, что по всякой неотрицательной непрерывной на $R^{s-1}\backslash\{0\}$ функции $\alpha(y_1,...,y_s)$, удовлетворяющей условию $\alpha(y_1,...,y_s)\to+\infty$ при $y_j\to+\infty$ и фиксированных остальных переменных определяются Соболевские гильбертовы пространства, связывающие Rf и f в равенстве

$$\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} = \sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}, \tag{3}$$

в более точной и ее объясняющей форме, содержащее исходное

$$\|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)} \succ\prec \|f\|_{W_2^\beta(R^s)}.$$

Еще в 1990 году Редактор перевода [12] В.П. Паламодов писал «*Число работ, относящихся к прикладной и теоретической томографии, измеряется тысячами*», и дальше «*Особенность томографических методов состоит в том, что их информативность в большей степени зависит от глубины и тонкости применяемой математической теории*», во что вписываются перспективы равенства (3) в уточнении известных и получении новых результатов в Компьютерной томографии, а также в проведении сопутствующих исследований по такому далеко идущему обобщению гильбертовых пространств Соболева, чем в дальнейшем в контексте [13] намерены заняться авторы этой статьи вместе с сотрудниками ИТМиНВ.

На этом пути техническую свободу в теории Компьютерной томографии предоставляет возможность записи преобразования Радона в форме чистого Лебеговского интеграла

$Rf\left(x\right)=\int_{y\in R_x^{s-1}\cap suppf}f(y)dx$, из которого следует, что функции $f(x)$ и $Rf\left(x\right)$, стало быть и функция R^{-1} обращения R со свойством $f=R^{-1}g, g=Rf$ ([7, Глава II.2]), имеют одно и то же множество определения $suppf$, в случае необходимости, с нулевым продолжением на все R^s с сохранением нормы.

В частности, все рассмотрения можно вести на единичном кубе $\left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right]^s$ для функций f с $suppf\subset\left(-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right)^s$, и тем, без ограничения общности, искомые функции $f(x)$ как обращающиеся в нуль на границе E_s полагать 1-периодическими по каждой из s переменных, что дает возможность использования мощного аппарата Гармонического анализа.

По-видимому, в теории Компьютерной томографии для получения специфических для нее результатов порожденные преобразованием Радона классы $W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1}\times R^1)$ требуют специального изучения и естественно их назвать пространствами Соболева-Радона, чему в последующем и будем следовать.

Список литературы

1 Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteuber die Verhandlungen Gesellshaft der Wissenschaften // Journal of Mathematical Physics – 1917. –Vol. 69. -P. 262-277.

2 Станислав Лем: Сумма технологии. М., "Мир", 1968.

3 Hetzenecker K, Limbeck-Lilienau C, Schweizer D, Laufersweiler B. Innovation durch Grundlagen for schung. Der Beitragwissenschaftlicher Theorienund Entdeckungen zum gesamt gesellschaftlichen Fortschritt. Begleitheft zur Ausstellung ander Universitet Wien [Internet]. Wien: Universitet Wien; 2016. S. 68. http://phaidra.univie.ac.at/o: 560305 Google Scholar BibTex RIS

4 Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. -1968. -Т. 32. -№3. –С. 649-686.

5 Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева–Морри $W_{p,\Phi}^l$ в пространство C // Мат. заметки. -1985. -Т. 37. -№3. -С. 399-406.

6 Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумакаева Г.Т. Критерий вложения анизотропных классов Соболева–Морри в пространство равномерно непрерывных функций //Сиб. матем. журн. -2016. -Т. 57. -№5. -С. 1156-1170.

7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 226 p.

8 Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Вып. 5. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.

9 Helgason S. The Radon transform. Second ed. Boston: Birkh?auser, 199

10 Sharafutdinov V. A. The Reshetnyak formula and Natterer stability estimates in tensor tomography // Inverse Problems. 2017. V. 33, N 2. 025002 (20pp).

11 Шарафутдинов В.А., Преобразование Радона на пространствах Соболева, Сиб. матем. журн., 62:3 (2021), 686–710; Siberian Math. J., 62:3 (2021), 560–580.

12 Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. -М.: Мир, 1990. -288 с., ил.

13 Темиргалиев Н.Т., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. -2018. -Т. 124. №3. -С. 8-88.

Н. Темірғалиев, Г.Е. Тауғынбаева, А.Ж. Жұбанышева

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Іргелі математика және ғылыми есептеулер институты, Қажымұқан көш., 13, Астана, Қазақстан

Гильберттік Соболев кеңістіктерінің икемді шкаласындағы Радон түрлендіруінің Планшерель формуласы

Аннотация. Томографтарда техникалық жүзеге асырылатын Радон түрлендіруінің математикалық теориясының қолдану аумағы шексіз, олардың ішінде ең кеңі медицина саласы болып табылады.

Радон түрлендіруін зерттеуде келесі қатынас жетекші орын алады:

Кез келген $\beta>0$ мен $f\in C_0^\infty\left(\Omega_s\right)$ *функциясы үшін*

$$c\left(\beta,s\right)\|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)}\le\|Rf\|_{W^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}\left(Z=S^{s-1}\times R^1\right)}\le C\left(\beta,s\right)\|f\|_{W_2^\beta(\Omega_s)}$$

қатынасы орындалатындай $c(\beta,\, s)$ және $C(\beta,\, s)$ оң сандары табылады.

Мақала осы эквиваленттілікті теңдік түрінде жалпыланған гильберттік Соболев кеңістіктері жағдайына таратуға арналған.

Түйін сөздер: Радон түрлендіруі, гильберттік Соболев кеңістіктерінің икемді шкаласы, Компьютерлік томография, Радон түрлендіруінің Планшерель формуласы, жалпыланған Решетняк формуласы.

N. Temirgaliyev, G.E. Taugynbayeva, A.Zh. Zhubanysheva

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhimukan str., 13, Astana, Kazakhstan

Plancherel's formula for the Radon transform in the flexible scale of Sobolev Hilbert spaces

Abstract. The mathematical theory of the Radon transform with technical implementation in tomographs has an unlimited range of applications, among which the widest are medical ones.

In the aspect of studies of the Radon transformation, the key role is played by the ratio:

For any $\beta > 0$ there are exist positive constants $c(\beta,\, s)$ и $C(\beta,\, s)$, such that $f \in C_0^{\infty}(\Omega_s)$

$$c(\beta, s)\, \|f\|_{W_2^{\beta}(\Omega_s)} \le \|Rf\|_{W^{\beta+\frac{(s-1)}{2}}\left(Z=S^{s-1}\times R^1\right)} \le C(\beta, s)\, \|f\|_{W_2^{\beta}(\Omega_s)}.$$

This article is devoted to extending this equivalence in the form of equality to the far-reaching case of Sobolev spaces.

Key words: Radon transform, flexible scale of Sobolev Hilbert spaces, Computed tomography, Plancherel's formula for the Radon transform, generalized Reshetnyak's formula.

References

1 Radon J. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. Berichteuber die Verhandlungen Gesellshaft der Wissenschaften, Journal of Mathematical Physics. 1917. Vol. 69. P. 262-277.

2 Stanislav Lem Summa tekhnologii[The amount of technology]. (Mir, Moscow, 1968).

3 Hetzenecker K, Limbeck-Lilienau C, Schweizer D, Laufersweiler B. Innovation durch Grundlagen for schung. Der Beitragwissenschaftlicher Theorienund Entdeckungen zum gesamt gesellschaftlichen Fortschritt. Begleitheft zur Ausstellung ander Universitet Wien. Wien: Universitet Wien; 2016. P. 68. Internet source: http://phaidra.univie.ac.at/o: 560305 Google Scholar BibTex RIS.

4 Ulyanov P.L. The imbedding of certain function classes H_p^{ω}, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1968. Vol. 32. №3. P. 649–686.

5 Dzhumakaeva G.T. A criterion for the imbedding of the Sobolev-Morrey class $W_{p,\Phi}^{l}$ in the space C, Math. Notesю 1985. Vol. 73. №3. P. 224–228.

6 Temirgaliev N., Zhainibekova M.A., Dzhumakaeva G.T. Criteria of embedding of classes of Morrey type, Russian Math. (Iz. VUZ). 2015. Vol. 59. №5. P. 69–73.

7 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 226 p.

8 Gel'fand I. M., Graev M. I., and Vilenkin N. Ya., Generalized Functions. Vol. 5: Integral Geometry and Representation Theory, Academic, New York (1966).

9 Helgason S. The Radon transform. Second ed. Boston: Birkhauser, 199

10 Sharafutdinov V. A. The Reshetnyak formula and Natterer stability estimates in tensor tomography, Inverse Problems. 2017. Vol. 33. №2. 025002 (20pp).

11 Sharafutdinov V. A., Radon Transform on Sobolev Spaces, Siberian Math. J. 2021. Vol. 62. №3. P. 560–580.

12 Natterer F. Matematicheskie aspekty komp'yuternoj tomografii [Mathematical aspects of computed tomography: Tran. from English]. (Mir, Moscow, 1990, 288 p.).

13 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Teoriya priblizhenij, Vychislitel'naya matematika i CHislennyj analiz v novoj koncepcii v svete Komp'yuternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter], Vestnik Evrazijskogo nacional'nogo universiteta imeni L.N.Gumileva Seriya Matematika. Informatika. Mekhanika [Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series]. 2018. Vol. 124. №3. P. 8–88.

Information about authors:

Темиргалиев Нурлан – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Таугынбаева Галия Ерболовна – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Жубанышева Аксауле Жанбыршиевна – ***автор для корреспонденции,*** PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, начальник отдела научных изданий Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

Temirgaliyev Nurlan – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Taugynbayeva Galiya – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Zhubanysheva Aksaule – ***corresponding author,*** PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, Head of the Department of Scientific Publications ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 09.12.2022