Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Компьютерлік ғылымдар. Механика сериясы, 2021, том 134, №1, 19-34 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

М.К. Потапов [1], Б.В. Симонов [2]

[1] *МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия*
(E-mail: mkpotapov@mail.ru [1], simonov-b2002@yandex.ru [2])

НЕРАВЕНСТВА, УТОЧНЯЮЩИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ СМЕШАННЫМИ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ В МЕТРИКАХ L_p И L_∞

Аннотация: Проблема оценивания модулей гладкости функций из L_q в терминах их модулей гладкости из L_p хорошо известна. Первым этапом оценивания модулей гладкости стало изучение свойств функций из классов Липшица и получение соответствующих вложений в работах Титчмарша, Харди, Литтлвуда, Никольского.

Классическое вложение Харди-Литтлвуда для пространств Липшица может быть получено как следствие из неравенства Ульянова для модулей непрерывности функции одной переменной. В работах Ульянова рассматривался модуль гладкости натурального порядка. Введение дробных модулей гладкости позволило в работах Потапова, Симонова, Тихонова усилить неравенство Ульянова. Позже те же авторы смогли обобщить неравенство Ульянова на функции двух переменных, получив оценки для смешанных модулей гладкости. Точность этих неравенств была доказана в случае, когда $1 < p < q < \infty$ или $1 = p < q = \infty$.

В настоящей статье изучаются смешанные модули гладкости дробных порядков функции двух переменных. Получены неравенства, уточняющие ранее известные оценки типа неравенств Ульянова между смешанными модулями гладкости в метриках L_p и L_q при значениях $1 < p < q = \infty$. Исследована точность полученных оценок. Изучена взаимосвязь этих и ранее известных оценок.

Ключевые слова: неравенство; метрика; смешанный модуль гладкости дробного порядка

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-678X-2020-134-1-19-34

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения:

$L_p, 1 \le p \le \infty, -$ множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π - периодических по каждому переменному, для которых

$$\|f\|_p < \infty,$$

где

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ если } 1 \le p < \infty;$$

$$\|f\|_p = \underset{\substack{0 \le x_1 \le 2\pi, \\ 0 \le x_2 \le 2\pi}}{supvrai} |f(x_1, x_2)|, \text{ если } p = \infty;$$

$\sigma(f) -$ ряд Фурье функции $f \in L_p$, то есть

$$\sigma(f) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + b_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 +$$

$$+v_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2+d_{n_1n_2}\sin n_1x_1\sin n_2x_2)\equiv\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A_{n_1n_2}(f),$$

где для краткости обозначено $\cos(0\cdot t)\equiv\frac{1}{2}$,

$$a_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\cos n_1x_1\cos n_2x_2dx_1dx_2,$$

$$b_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\sin n_1x_1\cos n_2x_2dx_1dx_2,$$

$$v_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\cos n_1x_1\sin n_2x_2dx_1dx_2,$$

$$d_{n_1n_2}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2)\sin n_1x_1\sin n_2x_2dx_1dx_2$$

— коэффициенты Фурье функции $f\in L_p$;

L_p^0 — множество функций $f\in L_p$ таких, что

$\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2)dx_1=0$ для почти всех x_2 и $\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2)dx_2=0$ для почти всех x_1;

$V_{n_1\infty}(f),V_{\infty n_2}(f),V_{n_1n_2}(f),n_i\in N\cup\{0\}(i=1,2),-$ суммы Валле-Пуссена ряда Фурье функции $f\in L_p$, т.е.

$V_{n_1\infty}(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1+t_1,x_2)V_{n_1}^{2n_1}(t_1)dt_1,\ V_{\infty n_2}(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1,x_2+t_2)V_{n_2}^{2n_2}(t_2)dt_2,$

$V_{n_1n_2}(f)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x_1+t_1,x_2+t_2)V_{n_1}^{2n_1}(t_1)V_{n_2}^{2n_2}(t_2)dt_1dt_2,$ где $V_0^0(t)=D_0(t)$,

$V_n^{2n}(t)=\frac{1}{n}\big(D_n(t)+...+D_{2n-1}(t)\big),n\in N,D_k(t)=\frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}},k\in N\cup\{0\};$

$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)-$ разность с шагом h_1 положительного порядка α_1 по переменной x_1 функции $f\in L_p$, то есть $\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f)=\sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty}(-1)^{\nu_1}\binom{\alpha_1}{\nu_1}f(x_1+(\alpha_1-\nu_1)h_1,x_2)$,

где $\binom{\alpha}{\nu}=1$ для $\nu=0$, $\binom{\alpha}{\nu}=\alpha$ для $\nu=1$, $\binom{\alpha}{\nu}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu\geq 2$;

$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)-$ разность с шагом h_2 положительного порядка α_2 по переменной x_2 функции $f\in L_p$, то есть $\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)=\sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty}(-1)^{\nu_2}\binom{\alpha_2}{\nu_2}f(x_1,x_2+(\alpha_2-\nu_2)h_2)$;

$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p-$ смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 функции $f\in L_p$, то есть

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p=\sup_{|h_i|\leq\delta_i,i=1,2}||\Delta_{h_1}^{\alpha_1}\big(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\big)||_p;$$

$Y_{m_1,m_2}(f)_p-$ наилучшее приближение углом функции $f\in L_p$, то есть

$$Y_{m_1,m_2}(f)_p=\inf_{T_{m_1,\infty},T_{\infty,m_2}}||f-T_{\infty,m_2}-T_{m_1,\infty}||_p,$$

где $T_{m_1,\infty}(x_1,x_2)-$ функция, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше, чем $m_1(m_1\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ по переменной x_1 и такая, что $T_{m_1,\infty}\in L_p$, $T_{\infty,m_2}(x_1,x_2)-$ функция, являющаяся тригонометрическим полиномом порядка не выше, чем $m_2(m_2\in\mathbb{N}\cup\{0\})$ по переменной x_2 и такая, что $T_{\infty,m_2}\in L_p$;

$f^{(\rho_1,\rho_2)}(x_1,x_2)-$ производную в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)\in L_p^0$ порядка $\rho_1\geq 0$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2\geq 0$ по переменной x_2 (см. [1]);

$[a]-$ целую часть числа a.

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \le CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2) \ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2) \ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2) \asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

Известны (см. [2]-[6]) следующие соотношения между модулями гладкости:

Пусть $f \in L_p^0, \alpha_i > 0, \delta_i \in (0,1)(i=1,2)$. *Тогда*

при $1 = p < q = \infty$

$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-1}\omega_{\alpha_1+1,\alpha_2+1}(f,t_1,t_2)_1\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$,

а) при $1 < p < q = \infty, \alpha_i > \gamma_i > 0, i=1,2$. *Тогда*

$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$.

б) при $1 < p < q = \infty,\ \alpha_2 > \gamma_2 > 0$

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}, \tag{1}$$

в) при $1 < p < q = \infty,\ \alpha_1 > \gamma_1 > 0$

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \tag{2}$$

В этой работе уточняются утверждения б) и в).

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_p^0,\ 1 < p < q = \infty, \alpha_1 > 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \alpha_2 > \gamma_2 > 0$, $\delta_i \in (0,1), i=1,2$. *Тогда*

1. справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \tag{3}$$

В соотношении (3), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ *на знак* $\asymp$.

2. Неравенство (3) точно в том смысле, что для любого $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1$ *существует функция* $f_1(x_1,x_2) \in L_p^0$ *такая, что*

$$A_1(f_1,\delta_1,\delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_1,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1^{(1)}+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_1,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}} \to \infty$$

для любого фиксированного δ_2 *и* $\delta_1 \to 0$.

3. Неравенство (3) точно в том смысле, что для любой функции $\xi_1(t_1)-$ *положительной, слабо колеблющейся на* $(0,1)$ *и такой, что* $\xi(t_1) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{t_1}\big)^{1-\frac{1}{p}}-$ *существует функция* $f_2(x_1,x_2) \in L_p^0$ *такая, что*

$$A_2(f_2,\delta_1,\delta_2) = \frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_2,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\xi_1(\delta_1))^{\frac{1}{\alpha_1}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_2,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}} \to \infty$$

для любого фиксированного δ_2 *и* $\delta_1 \to 0$.

4. Если в соотношении (3) γ_2 заменить на α_2, то полученное соотношение будет неверным.

5. Справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}, \qquad (4)$$

при этом в соотношении (4), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ на знак $\asymp$. Однако существует функция $f_3(x_1,x_2)$, такая, что для нее в соотношении (4) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

6.а. Из неравенства (3) следует неравенство (1) в утверждении б).

6.б. Неравенство (3) более точное, чем неравенство (1) в утверждении б) в том смысле, что существует функция $f_4(x_1,x_2)\in L_p^0$ такая, что для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1\to 0$, а также для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2\to 0$ выражение в правой части (3) стремится к нулю, а выражение в правой части (1) обращается в $+\infty$.

Теорема 2. *Пусть $f\in L_p^0$, $1<p<q=\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \alpha_1>\gamma_1>0, \alpha_2>0$, $\delta_i\in(0,1), i=1,2$. Тогда*

1. справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \qquad (5)$$

В соотношении (5), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ на знак $\asymp$.

2. Неравенство (5) точно в том смысле, что для любого $\alpha_2^{(1)}>\alpha_2$ существует функция $f_5(x_1,x_2)\in L_p^0$ такая, что

$$A_3(f_5,\delta_1,\delta_2)=\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_5,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2^{(1)}+\frac{1}{p}}(f_5,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}}\to\infty$$

для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2\to 0$.

3. Неравенство (5) точно в том смысле, что для любой функции $\xi_2(t_2)-$ положительной, слабо колеблющейся на $(0,1)$ и такой, что $\xi(t_2)=\bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{t_2}\big)^{1-\frac{1}{p}}-$ существует функция $f_6(x_1,x_2)\in L_p^0$ такая, что

$$A_4(f_6,\delta_1,\delta_2)=\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_6,\delta_1,\delta_2)_\infty}{\int\limits_0^{\delta_2(\xi_2(\delta_2))^{\frac{1}{\alpha_2}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f_6,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}}\to\infty$$

для любого фиксированного δ_1 и $\delta_2\to 0$.

4. Если в соотношении (5) γ_1 заменить на α_1, то полученное соотношение будет неверным.

5. Справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}, \tag{6}$$

при этом в соотношении (6), вообще говоря, нельзя заменить знак $\ll$ *на знак* $\asymp$ *. Однако существует функция* $f_7(x_1,x_2)$*, такая, что для нее в соотношении (6) знак* $\ll$ *может быть заменен знаком* $\asymp$ *.*

6.а. Из неравенства (5) следует неравенство (2) в утверждении в).

6.б. Неравенство (5) более точное, чем неравенство (2) в утверждении в) в том смысле, что существует функция $f_8(x_1,x_2)\in L_p^0$ *такая, что для любого фиксированного* δ_2 *и* $\delta_1\to 0$*, а также для любого фиксированного* δ_1 *и* $\delta_2\to 0$ *выражение в правой части (5) стремится к нулю, а выражение в правой части (2) обращается в* $+\infty$ *.*

Из теоремы 1 и 2 следует

Теорема 3. *Пусть* $f\in L_p^0$, $1<p<q=\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \alpha_i>0, \rho_i>0, \delta_i\in(0,1), i=1,2.$ *Тогда*

1. если $\alpha_2>\gamma_2>0$, *то*

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}t_1^{-\rho_1-\frac{1}{p}}t_2^{-\rho_2-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\rho_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2},$$

2. если $\alpha_1>\gamma_1>0$, *то*

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}}\int\limits_0^{\delta_1}t_1^{-\rho_1-\frac{1}{p}}t_2^{-\rho_2-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\rho_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Замечание. Результаты, аналогичные результатам теорем 1 и 2, для функции одной переменной следуют из работы [7].

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1([5]). *Пусть* $f\in L_p^0$, $g\in L_p^0$, $1\le p\le\infty$, $\beta_i\ge\alpha_i>0, r_i>0$, $n_i\in\mathbb{N}$, $i=1,2$. *Тогда*

(1) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,0)_p=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,0,\delta_2)_p=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,0,0)_p=0.$

(2) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f+g,\delta_1,\delta_2)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p+\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(g,\delta_1,\delta_2)_p.$

(3) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,t_1,t_2)_p$, *если* $0\le\delta_i\le t_i, i=1,2$.

(4) $\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p}{\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}}\ll\frac{\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,t_1,t_2)_p}{t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}}$, *если* $0<t_i\le\delta_i\le\pi, i=1,2$.

(5) $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\lambda_1\delta_1,\lambda_2\delta_2)_p\ll(\lambda_1+1)^{\alpha_1}(\lambda_2+1)^{\alpha_2}\,\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p$,
если $\lambda_i>0$ *и* $0<\lambda_i\delta_i\le\pi$, $i=1,2$.

(6) $Y_{n_1-1,n_2-1}(f)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2})_p\ll\frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\sum\limits_{v_1=1}^{n_1+1}\sum\limits_{v_2=1}^{n_2+1}v_1^{\alpha_1-1}v_2^{\alpha_2-1}Y_{v_1-1,v_2-1}(f)_p.$

(7) $\delta_1^{-r_1}\delta_2^{-r_2}\omega_{\alpha_1+r_1,\ \alpha_2+r_2}(f,\delta_1,\delta_2)_p\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f^{(r_1,r_2)},\delta_1,\delta_2)_p\ll$
$\ll\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{\delta_2}t_1^{-r_1}t_2^{-r_2}\omega_{\alpha_1+r_1,\alpha_2+r_2}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}$, *если* $0<\delta_i\le\pi, i=1,2$, *и* $f^{(r_1,r_2)}\in L_p^0$.

Лемма 2([5]). *Пусть* $f\in L_p^0, 1\le p\le\infty, \alpha_i>0, n_i\in\mathbb{N}, i=1,2.$ *Тогда*

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\Big(f,\tfrac{1}{n_1},\tfrac{1}{n_2}\Big)_p\asymp n_1^{-\alpha_1}n_2^{-\alpha_2}\big\|V_{n_1,n_2}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(f)\big\|_p+n_1^{-\alpha_1}\big\|V_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f-V_{\infty,n_2}(f))\big\|_p+$$
$$+n_2^{-\alpha_2}\big\|V_{\infty,n_2}^{(0,\alpha_2)}(f-V_{n_1,\infty}(f))\big\|_p+\big\|f-V_{n_1,\infty}(f)-V_{\infty,n_2}(f)+V_{n_1,n_2}(f)\big\|_p.$$

Лемма 3([5]). *Пусть* $f\in L_p, 1\le p\le\infty, m_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}, i=1,2.$ *Тогда*

(а) $||V_{m_1,\infty}(f)||_p\ll||f||_p$, *(б)* $||V_{\infty,m_2}(f)||_p\ll||f||_p$, *(в)* $||V_{m_1,m_2}(f)||_p\ll||f||_p$.

Лемма 4([5]). *Пусть* $f \in L_p^0, 1 \leq p < q \leq \infty,$ $q^* = q,$ *если* $q < \infty,$ $q^* = 1,$ *если* $q = \infty,$ $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2.$ *Тогда*

$$Y_{2^{n_1}-1,2^{n_2}-1}(f)_q \ll \Big(\sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \sum_{\nu_2=n_2}^{\infty} 2^{(\nu_1+\nu_2)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q^*} Y^{q^*}_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_p \Big)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Лемма 5([5]). *Пусть* $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2.$ *Тогда*

(а) $||f - V_{m_1,\infty}(f) - V_{\infty,m_2}(f) + V_{m_1,m_2}(f)||_p \ll Y_{m_1,m_2}(f)_p,$

(б) $||f - V_{2^{m_1},\infty}(f)||_p \ll \sum\limits_{\nu_1=m_1}^{\infty} ||V_{2^{\nu_1+1},\infty}(f) - V_{2^{\nu_1},\infty}(f)||_p,$

(в) $||f - V_{\infty,2^{m_2}}(f)||_p \ll \sum\limits_{\nu_2=m_2}^{\infty} ||V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{\nu_2}}(f)||_p.$

Лемма 6 ([5]). *Пусть* $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty, m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha_i > 0, i = 1, 2.$ *Тогда*

(а) $||V_{2^{m_1+1},\infty}(f) - V_{2^{m_1},\infty}(f)||_p \ll 2^{-m_1\alpha_1}||V^{(\alpha_1,0)}_{2^{m_1+1},\infty}(f) - V^{(\alpha_1,0)}_{2^{m_1},\infty}(f)||_p,$

(б) $||V_{\infty,2^{m_2+1}}(f) - V_{\infty,2^{m_2}}(f)||_p \ll 2^{-m_2\alpha_2}||V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f) - V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{\nu_2}}(f)||_p,$

(в) $||V_{2^{m_1+1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1+1},2^{m_2}}(f) + V_{2^{m_1},2^{m_2}}(f)||_p \ll$

$\ll 2^{-m_1\alpha_1-m_2\alpha_2}||\big(V_{2^{m_1+1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1},2^{m_2+1}}(f) - V_{2^{m_1+1},2^{m_2}}(f) + V_{2^{m_1},2^{m_2}}(f)\big)^{(\alpha_1,\alpha_2)}||_p.$

Лемма 7([1]) (Неравенство Гельдера). *Пусть* $1 \leq p \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, f_1 \in L_p(E^n), f_2 \in L_{p'}(E^n).$ *Тогда функция* $f_1(x) \cdot f_2(x)$ *интегрируема на* E^n *и имеет место неравенство Гельдера*

$$\int\limits_{E^n} |f_1(x) f_2(x)| dx \leq \|f_1\|_p \|f_2\|_{p'}.$$

Лемма 8([5]). *Пусть* $1 \leq p \leq \infty,$ *функция* $T_{n_1,\infty}(x_1, x_2) \in L_p^0,$ *и является тригонометрическим полиномом порядка не выше, чем* $n_1 (n_1 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_1*; функция* $T_{\infty,n_2}(x_1, x_2) \in L_p^0$ *и является тригонометрическим полиномом не выше, чем* $n_2 (n_2 \in \mathbb{N})$ *по переменной* x_2*. Тогда*

$||T^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}||_p \ll n_1^{\alpha_1}||T_{n_1,\infty}||_p; \quad ||T^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}||_p \ll n_2^{\alpha_2}||T_{\infty,n_2}||_p.$

Лемма 9(неравенство С.М. Никольского)([8], [9]). *Пусть* $T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)-$ *тригонометрический полином порядка* n_1 *по переменной* x_1 *и порядка* $n_2 (n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ *по переменной* $x_2,$ $1 \leq p_i \leq q_i \leq \infty (i = 1, 2).$ *Тогда*

$$\|T_{n_1 n_2}(x_1, x_2)\|_{q_1 q_2} \leq C n_1^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}} n_2^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}} \|T_{n_1,n_2}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2}.$$

где постоянная C *не зависит от* n_1 *и* n_2.

Вспомогательные результаты для функции одного переменного. Обозначим через:

$L_p^{(1)},$ $1 \leq p \leq \infty, -$ множество $2\pi-$ периодических измеримых функций одной переменной $f(x),$ для которой $||f||_p^{(1)} < \infty,$ где

$||f||_p^{(1)} = \Big(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty,$ если $1 \leq p < \infty,$ $||f||_p^{(1)} = \underset{0 \leq x \leq 2\pi}{supvrai} |f(x)|,$ если $p = \infty;$

$L_p^{(1)0}-$ множество функций $f \in L_p^{(1)},$ $1 \leq p \leq \infty,$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx = 0;$

$\sigma(f)-$ ряд Фурье функции $f \in L_p^{(1)},$ то есть

$$\sigma(f) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$V_{(1)n}(f), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, -$ суммы Валле-Пуссеена ряда Фурье функции $f \in L_p^{(1)},$ то есть

$$V_{(1)n}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x+t) V_n^{2n}(t) dt;$$

$\omega_\alpha(f, \delta)_p^{(1)}-$ модуль гладкости положительного порядка α функции $f \in L_p^{(1)},$ то есть

$\omega_\alpha(f, \delta)_p^{(1)} = \sup\limits_{|h| \leq \delta} ||\Delta_h^\alpha(f)||_p^{(1)},$ где $\Delta_h^\alpha(f) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{\alpha}{\nu} f(x + (\alpha - \nu)h);$

$f^{(\rho)}(x)$ - производную в смысле Вейля порядка ρ функции $f(x) \in L_p^{(1)0}$.

Будем писать, что $g(x) \in M_p^{(1)}$, если $g \in L_p^{(1)0}$, $\sigma(g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \psi(kx)$, где $\psi(x) = \cos x$ или $\psi(x) = \sin x$, и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $a_k \geq a_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что из этих условий следует, что $a_k \geq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 10([5]). *Пусть* $g(x) \in L_p^{(1)0}, 1 < p < \infty$. *Пусть* $\widetilde{g}(x)-$ *функция сопряженная с функцией* $g(x)$. *Тогда* $\sigma(\widetilde{g}) \equiv \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x)$, $\widetilde{g} \in L_p^{(1)0}$ *и*

$$||\widetilde{g}||_p^{(1)} \ll ||g||_p^{(1)}.$$

Лемма 11([5]). *Пусть* $g(x) \in M_p^{(1)}, g^{(r)} \in L_p^{(1)0}, 1 < p < \infty, r \geq 0, n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Big(\int\limits_0^{2\pi} |g^{(r)}(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \asymp \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^p k^{(r+1)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 12([5],[10]). *Пусть* $1 < p < q = \infty, \delta \in (0,1)$.

(а). Пусть $\alpha_1 > 0, \zeta(x)-$ *положительная функция, слабо колеблющаяся на* $(0,1)$ *и такая, что* $\zeta(x) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2 \frac{2}{x}\big)^{\frac{1}{p'}}$ *при* $x \to 0$. *Пусть функция* $g_1(x)$ *такая, что*

$$g_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha_1+1}}, \textit{если } \alpha_1 \neq 2l-1,\ l \in \mathbb{N},$$

$$g_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha_1+1}}, \textit{если } \alpha_1 = 2l-1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$A_1(g_1,\delta) = \frac{\omega_{\alpha_1}(g_1,\delta)_\infty^{(1)}}{\int\limits_0^{\delta(\zeta(\delta))^{\frac{1}{\alpha_1}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_1+\frac{1}{p}}(g_1,t)_p^{(1)} \frac{dt}{t}} \gg \frac{\left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\zeta(\delta)}.$$

(б). Пусть $g_2(x) = \sin x$. *Тогда при* $\alpha_2 > 0$

$$\omega_{\alpha_2}(g_2,\delta)_p^{(1)} \asymp \delta^{\alpha_2}, \quad A_2(g_2,\delta) = \int\limits_0^{\delta(\log_2 \frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_2+\frac{1}{p}}(g_2,t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_2} (\log_2 \tfrac{2}{\delta})^{\frac{1}{p'}},$$

$$D(g_2,\delta) = \int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_2+\frac{1}{p}}(g_2,t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_2}.$$

(в). Пусть $\alpha_3 > 0, 1 \leq r < \infty, \beta > 0$. *Пусть функция* $g_3(x)$ *такая, что*

$$g_3(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu\alpha_3}} \cos 2^\nu x.$$

Тогда $\omega_{\alpha_3+\beta}(g_3,\delta)_r \asymp \delta^{\alpha_3}$.

(г). Пусть $g_4(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{2-\frac{1}{p}} 2^{\nu\frac{1}{p}}} \cos 2^\nu x$. *Тогда при* $\alpha_4 > 0$

$$\omega_{\alpha_4+\frac{1}{p}}(g_4,\delta)_p^{(1)} \asymp \delta^{\frac{1}{p}} (\log_2 \tfrac{2}{\delta})^{-2+\frac{1}{p}}.$$

(д). Пусть $\alpha_5 > 0$ *и функция* $g_5(x)$ *такая, что*

$$g_5(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha_5+1} \ln^{\frac{1}{p}}(k+1)}, \ \textit{если} \ \ \alpha_5 \neq 2l-1,\ l \in \mathbb{N},$$

$$g_5(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha_5+1} \ln^{\frac{1}{p}}(k+1)}, \ \textit{если} \ \ \alpha_5 = 2l-1,\ l \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\omega_{\alpha_5}(g_5,\delta)_\infty^{(1)} \gg \delta^{\alpha_5} \big(\log_2 \tfrac{2}{\delta}\big)^{1-\frac{1}{p}}, \quad \int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha_5+\frac{1}{p}}(g_5,t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_5} \left(\log_2 \log_2 \tfrac{3}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\int\limits_0^{\delta} t^{-\frac{1}{p}} \left(\log_2 \tfrac{2}{t}\right)^{\frac{1}{p'}} \omega_{\alpha_5+\frac{1}{p}}(g_5,t)_p^{(1)} \frac{dt}{t} \asymp \delta^{\alpha_5} \left(\log_2 \tfrac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{p'}} \big(\log_2 \log_2 \tfrac{3}{\delta}\big)^{\frac{1}{p}}.$$

(е). Пусть $\alpha > \gamma > \frac{\alpha}{2} > 0$ *и функция* $g_6(x)$ *такова, что* $E_n(g_6)_p^{(1)} \asymp (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{p}}$. *Тогда*

$$D_1(g_6,\delta)=\int\limits_0^\delta t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma+\frac{1}{p}}(g_6,t)_p^{(1)}\frac{dt}{t}\asymp\delta^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$A_3(g_6,\delta)=\int\limits_0^{\delta(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(g_6,t)_p^{(1)}\frac{dt}{t}\asymp\delta^{\frac{\alpha}{2}}(\log_2\frac{2}{\delta})^{\frac{1}{2p'}}.$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

4.1. Доказательство пункта 1 теоремы 1. Для каждого $\delta_i\in(0,1)$ существует целое неотрицательное число n_i такое, что $\frac{1}{2^{n_i+1}}\le\delta_i<\frac{1}{2^{n_i}}, i=1,2$. Тогда, применяя свойства (4) и (3) леммы 1, имеем $J=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty\ll\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\left(f,\frac{1}{2^{n_1+1}},\frac{1}{2^{n_2+1}}\right)_\infty$.
Применяя лемму 2, получаем

$$J\ll 2^{-n_1\alpha_1-n_2\alpha_2}\|V^{(\alpha_1,\alpha_2)}_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)\|_\infty+2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^{n_1+1},\infty}(f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty+$$
$$+2^{-n_2\alpha_2}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f-V_{2^{n_1+1},\infty}(f))\|_\infty+\|f-V_{2^{n_1+1},\infty}(f)-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)+V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)\|_\infty\equiv$$
$$\equiv J_1+J_2+J_3+J_4.$$

Оценим J_4. Применяя леммы 5 (пункт а), 4 и 1 (пункт 6), будем иметь

$$J_4\ll Y_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)_\infty\ll\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)\frac{1}{p}}Y_{2^{\nu_1}-1,2^{\nu_2}-1}(f)_p\ll$$
$$\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$
$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}=I(\delta_1,\delta_2).$$

Оценим J_3. Применяя лемму 5 (б), получаем $J_3=2^{-n_2\alpha_2}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f)-$

$$-V_{2^{n_1+1},\infty}(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty\ll 2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\|V_{2^{m_1+1},\infty}(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f))-$$
$$-V_{2^{m_1},\infty}(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty=2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)\|_\infty.$$

Так как $f\in L_p^{(0)}$, то $V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{n_2+1}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)=$

$$=\sum_{m_2=0}^{n_2+1}\Big(V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{m_2}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)-V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,[2^{m_2-1}]}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)\Big).$$

Тогда получим $J_3\ll 2^{-n_2\alpha_2}\sum\limits_{m_2=0}^{n_2+1}\sum\limits_{m_1=n_1+1}^{\infty}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{m_2}}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-$

$$-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)-V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,[2^{m_2-1}]}\big(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f)\big)\|_\infty.$$

Применяя лемму 9, будем иметь

$$J_3\ll 2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_2=0}^{n_2+1}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{(m_1+m_2)\frac{1}{p}}\|V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,2^{m_2}}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))-$$
$$-V^{(0,\alpha_2)}_{\infty,[2^{m_2-1}]}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))\|_p$$

Применяя леммы 8 и 6, получим

$$J_3\ll 2^{-n_2\alpha_2}\sum_{m_2=0}^{n_2+1}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}2^{m_2(\alpha_2-\gamma_2)}\|V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,2^{m_2}}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))-$$
$$-V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,[2^{m_2-1}]}(V_{2^{m_1+1},\infty}(f)-V_{2^{m_1},\infty}(f))\|_p.$$

Применяя леммы 3 и 2, будем иметь

$$J_3\ll\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}2^{-n_2\gamma_2}\|V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,2^{n_2+1}}(f-V_{2^{m_1},\infty}(f))\|_p+\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}2^{-n_2\gamma_2}\|V^{(0,\gamma_2+\frac{1}{p})}_{\infty,2^{n_2+1}}(f-$$
$$-V_{2^{m_1+1},\infty}(f))\|_p\ll 2^{n_2\frac{1}{p}}\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}2^{m_1\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\frac{1}{2^{m_1}},\frac{1}{2^{n_2}})_p\ll$$
$$\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}2^{(\nu_1+\nu_2)\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\frac{1}{2^{\nu_1}},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p\ll I(\delta_1,\delta_2).$$

Оценим J_2. Применяя свойства нормы, получим
$J_2 \leq 2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{2^{n_1+1},\infty}(f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))-V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty+$

$+2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f))\|_\infty=J_2^1+J_2^2.$

Применяя лемму 8, будем иметь
$J_2^1 \ll \|V_{2^{n_1+1},\infty}(f)-V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)-V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f)+V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f))\|_\infty.$

Заметим, что $(f-V_{2^{n_1+1},\infty}(f)-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)+V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f))-$
$-(f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)-V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f)+V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f))=$

$=-V_{2^{n_1+1},\infty}(f)+V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)+V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f)-V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f))=$

$=-(V_{2^{n_1+1},\infty}(f)-V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)-V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f)+V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f))).$

Используя это равенство и применяя лемму 2, получим
$J_2^1 \ll \|f-V_{2^{n_1+1},\infty}(f)-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)+V_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)\|_\infty+$
$+\|f-V_{\infty,2^{n_2+1}}(f)-V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f)+V_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)\|_\infty \ll$

$\ll Y_{2^{n_1+1},2^{n_2+1}}(f)_\infty+Y_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)_\infty \ll Y_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{n_2+1}}(f)_\infty.$

Применяя лемму 4 и лемму 1 (как при оценке сверху J_4), получим $J_2^1 \ll I(\delta_1,\delta_2)$.
Оценим J_2^2. Применяя лемму 5, получим
$J_2^2 \ll \sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f)-V_{\infty,2^{\nu_2}}(f))\|_\infty=$

$=\sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} 2^{-n_1\alpha_1}\|V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f)-V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f)\|_\infty.$

Так как $V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f)-V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f)=V^{(\alpha_1,0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f)-V_{\infty,2^{\nu_2}}(f))$, то, обозначив $V_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f)-V_{\infty,2^{\nu_2}}(f)=\psi$, рассмотрим функцию $\psi(x_1,x_2)$ для почти всех x_2 как функцию только x_1 и обозначим ее $\psi_1(x_1)$. Оценим $\|V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1(x_1))\|^{(1)}_\infty$.

Так как $f\in L_p^0$, то $V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1(x_1))=\sum\limits_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1} c_\nu(x_1)$.

Обозначим

$$(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1)=\sum\limits_{\nu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1} c_\nu(x_1)\nu^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда, используя определение дробной производной, получим

$$(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1)=(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{(\frac{1}{p})}(\psi_1)\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right)+(\widetilde{V_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}})^{(\alpha_1)^{(\frac{1}{p})}}(\psi_1)\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{p}\right), \quad (7)$$

где $\widetilde{V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}}(\psi_1)$ есть функция сопряженная к функции $V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)$.

Легко проверить, что

$$V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)=\int\limits_0^{2\pi}(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1,t_1)\overline{K}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(x_1-t_1)dt_1,$$

где $\overline{K}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(t_1)=\sum\limits_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1}\mu^{-\frac{1}{p}}\cos\mu t_1$.

Применяя неравенство Гельдера (лемма 7), получим

$$||V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(f)||_\infty^{(1)}\le||(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1)||_p^{(1)}\cdot||\overline{K}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}||_{p'}^{(1)},\ \text{где}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1. \quad (8)$$

Применяя лемму 11, получим

$$||K_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}||_{p'}\ll\left(\sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1}(\mu^{-\frac{1}{p}})^{p'}\mu^{p'-2}\right)^{\frac{1}{p'}}=\left(\sum_{\mu=1}^{2\cdot\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]-1}\mu^{-1}\right)^{\frac{1}{p'}}\ll n_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Используя соотношение (7), а затем лемму 10, имеем

$$||(V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]})^{*(\frac{1}{p})}(\psi_1)||_p^{(1)}\ll||V^{(\alpha_1+\frac{1}{p})}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)||_p^{(1)}+||\widetilde{V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}}^{(\frac{1}{p})}(\psi_1)||_p^{(1)}\ll||V^{(\alpha_1+\frac{1}{p})}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)||_p^{(1)}.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (8), получаем

$$||V^{(\alpha_1)}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(f)||_\infty^{(1)}\ll||V^{(\alpha_1+\frac{1}{p})}_{(1)\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}(\psi_1)||_p^{(1)}n_1^{\frac{1}{p'}}.$$

Тогда получим

$$J_2^2\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{-n_1\alpha_1}\underset{0\le x_2\le 2\pi}{supvrai}\left|\left(\int\limits_0^{2\pi}\left|(V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f)-V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f))(x_1,x_2)\right|^p dx_1\right)^{\frac{1}{p}}\cdot n_1^{\frac{1}{p'}}\right|.$$

Применяя неравенство С.М. Никольского (лемма 9), будем иметь

$$J_2^2\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{\nu_2\frac{1}{p}}2^{-n_1\alpha_1}n_1^{\frac{1}{p'}}\left\|V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2+1}}(f)-V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],2^{\nu_2}}(f)\right\|_p\ll$$

$$\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{\nu_2\frac{1}{p}}2^{-n_1\alpha_1}n_1^{\frac{1}{p'}}\|V^{(\alpha_1+\frac{1}{p},0)}_{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right],\infty}(f-V_{\infty,2^{\nu_2}}(f))\|_p.$$

Далее, применяя леммы 2 и 1, будем иметь

$$J_2^2\ll\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty}2^{\nu_2\frac{1}{p}}\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]^{\alpha_1+\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\frac{1}{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]},\frac{1}{2^{\nu_2}})_p\int\limits_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{1}{\left[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\right]}}t_1^{\alpha_1}\frac{dt_1}{t_1}\ll I(\delta_1,\delta_2).$$

Объединяя полученные оценки для J_2^1 и J_2^2, получим $J_2\ll I(\delta_1,\delta_2)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства $J_1\ll I(\delta_1,\delta_2)$. Объединяя оценки для J_1,J_2,J_3 и J_4, имеем $J\ll I(\delta_1,\delta_2)$ и тем самым неравенство (3) доказано.

Рассмотрим функцию $f_1(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2$. Так как $\omega_{\beta_1,\beta_2}(f_1,\delta_1,\delta_2)_p=\omega_{\beta_1}(\sin x_1,\delta_1)_p\cdot\omega_{\beta_2}(\sin x_2,\delta_2)_p$, то, применяя лемму 12 (б), имеем $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f_1,\delta_1,\delta_2)_\infty\asymp$

$\delta_1^{\alpha_1}\cdot\delta_2^{\alpha_2}$,

$\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_1,\delta_1,\delta_2)_p\asymp\delta_1^{\alpha_1+\frac{1}{p}}\cdot\delta_2^{\gamma_2+\frac{1}{p}}$. Но тогда

$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\cdot\delta_2^{\gamma_2}$.

Таким образом, для функции $f_1(x_1,x_2)$ правая и левая части соотношения (2) имеют разные порядки как функции переменной δ_1 при фиксированной δ_2, что и означает, что в соотношении (3) вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить знаком $\asymp$.

4.2. Доказательство пункта 2 теоремы 1. Рассмотрим функцию $f_1(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2$. Тогда

$A_1(f_1,\delta_1,\delta_2)\asymp\frac{\delta_1^{\alpha_1}\cdot\delta_2^{\alpha_2}}{\delta_1^{\alpha_1^{(1)}}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1 p'}}\cdot\delta_2^{\gamma_2}}\to\infty$ для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1\to 0$.

4.3. Доказательство пункта 3 теоремы 1. Пусть $g_1(x),g_2(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

Рассмотрим функцию $f_2(x_1,x_2)=g_1(x_1)g_2(x_2)$,

Так как $A_2(f_2,\delta_1,\delta_2)=A_1(g_1,\delta_1)\cdot\frac{\omega_{\alpha_2}(g_2,\delta_2)_p^{(1)}}{D(g_2,\delta_2)}$, то применяя лемму 12 (а) и (б), получаем

$$A_2(f_2,\delta_1,\delta_2)\gg\frac{\left(\log_2\frac{2}{\delta_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\zeta(\delta_1)}\delta_2^{\alpha_2-\gamma_2}.$$

Откуда следует, что при любом фиксированном δ_2 будем иметь

$$A_2(f_2,\delta_1,\delta_2)\to\infty \text{ при } \delta_1\to 0.$$

4.4. Доказательство пункта 4 теоремы 1. Покажем теперь, что если в соотношении (3) заменить γ_2 на α_2, полученное соотношение не будет верным. Для этого покажем, что для любой функции $f\in L_p^0$, где $1<p<q=\infty$ не существует такой положительной постоянной C, не зависящей от f,δ_1 и δ_2, что справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}. \qquad (9)$$

Пусть $g_2(x),g_5(x)$ есть функции, определенные в лемме 12. Рассмотрим функцию $g(x_1,x_2)=g_2(x_1)\cdot g_5(x_2)$. Так как $j_1=\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(g,\delta_1,\delta_2)_\infty=\omega_{\alpha_1}(g_2,\delta_1)_\infty^{(1)}\cdot\omega_{\alpha_2}(g_5,\delta_2)_\infty^{(1)}$, то применяя лемму 12 (б) и (д), получаем, что $j_1\gg\delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\left(\log_2\frac{2}{\delta_2}\right)^{1-\frac{1}{p}}$.

Так как $\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(g,\delta_1,\delta_2)_p=\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p}}(g_2,\delta_1)_p^{(1)}\cdot\omega_{\alpha_2+\frac{1}{p}}(g_5,\delta_2)_p^{(1)}$, то применяя лемму 12 (б) и (д), получаем, что

$j_2=\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(g,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\delta_2^{\alpha_2}\left(\log_2\log_2\frac{3}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Если бы существовала положительная постоянная C, не зависящая от δ_1 и δ_2 такая, что $j_1\le C\cdot j_2$, то для любого фиксированного $\delta_1\in(0,1)$ было бы справедливо неравенство $\left(\log_2\frac{2}{\delta_2}\right)^{1-\frac{1}{p}}\ll\left(\log_2\frac{2}{\delta_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\log_2\log_2\frac{3}{\delta_2}\right)^{\frac{1}{p}}$. Однако это неравенство несправедливо при $\delta_2\to 0$. Отсюда следует, что для функции g соотношение (9) не верно, а это и означает, что в неравенстве (3) нельзя заменить γ_2 на α_2.

4.5. Доказательство пункта 5 теоремы 1. Применяя свойства смешанного модуля гладкости, будем иметь

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}=\int\limits_0^{\delta_2}t_2^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^{\delta_1}t_1^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}+$$

$$+\int\limits_{\delta_1}^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}t_1^{\alpha_1}t_1^{-(\alpha_1+\frac{1}{p})}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}t_2^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_0^{\delta_1}t_1^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}+\delta_1^{-(\alpha_1+\frac{1}{p})}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\delta_1,t_2)_p\times$$

$$\times\int\limits_{\delta_1}^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}t_1^{\alpha_1}\frac{dt_1}{t_1}\Big)\frac{dt_2}{t_2}\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Таким образом, верно неравенство (4).

Пусть $g_2(x), g_3(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

Рассмотрим функцию $g(x_1,x_2)=g_3(x_1)\cdot g_2(x_2)$. Тогда

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(g,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1-\frac{1}{p}}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\frac{1}{(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 pp'}}}\delta_2^{\gamma_2},$$

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1-\frac{1}{p}}\left(\log_2\frac{2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{p'}}\delta_2^{\gamma_2}.$$

Таким образом, для функции $g(x_1,x_2)$ правая и левая части соотношения (4) имеют разные порядки как функции переменных δ_1 и δ_2, что и означает, что в соотношении (4) вообще говоря, нельзя знак $\ll$ заменить знаком $\asymp$.

Рассмотрим функцию $f_3(x_1,x_2)=f_1(x_1,x_2)=\sin x_1\cdot\sin x_2$. Тогда

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\cdot\delta_2^{\gamma_2},$$

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\delta_1^{\alpha_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{p'}}\cdot\delta_2^{\gamma_2}.$$

Для этой функции в соотношении (4) знак $\ll$ может быть заменен знаком $\asymp$.

4.6. Доказательство пункта 6 теоремы 1.

а. Применяя к неравенству (3) неравенство (4), получим утверждение б).

б. Покажем, что неравенство (3) более точное, чем неравенство (1) утверждения б).

Пусть $g_2(x), g_4(x)$ есть функции, определенные в лемме 12.

Рассмотрим функцию $f_4(x_1,x_2)=g_4(x_1)g_2(x_2)$.

Так как $\omega_{\beta_1,\beta_2}(f_4,\delta_1,\delta_2)_p=\omega_{\beta_1}(g_4,\delta_1)_p(1)\cdot\omega_{\beta_2}(g_2,\delta_2)_p^{(1)}$, то, применяя лемму 12 (г), для левого выражения в (4) получим

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_4,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\asymp\frac{1}{\Big(\log_2\frac{2}{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}\Big)^{1-\frac{1}{p}}}\delta_2^{\gamma_2},$$

а для правого выражения в (4) получим

$$\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f_4,t_1,t_2)_p\left(\log_2\frac{2}{t_1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}=\infty.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

6.1. Доказательство пункта 1 теоремы 3. Применяя пункт 1 теоремы 1, будем иметь

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f^{(\rho_1,\rho_2)},t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}.$$

Для каждого $\delta_i\in(0,1)$ существует целое неотрицательное число n_i такое, что $\frac{1}{2^{n_i+1}}\le\delta_i<\frac{1}{2^{n_i}}, i=1,2.$ Найдется натуральное число M_1 такое, что $2^{M_1-1}\le\Big[\frac{2^{n_1+1}}{n_1^{\frac{1}{\alpha_1 q}}}\Big]<2^{M_1}$. Тогда

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{2^{-n_2}}\int\limits_0^{2^{-M_1}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f^{(\rho_1,\rho_2)},t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ll$$

$$\ll\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\sum_{m_1=M_1}^{\infty}2^{\frac{m_1}{p}}2^{\frac{m_2}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f^{(\rho_1,\rho_2)},\tfrac{1}{2^{m_1}},\tfrac{1}{2^{m_2}})_p.$$

Применяя лемму 1 (7), получим $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll$

$$\ll\sum_{m_2=n_2}^{\infty}\sum_{m_1=M_1}^{\infty}2^{\frac{m_1}{p}}2^{\frac{m_2}{p}}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty}\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}2^{\rho_1\nu_1}2^{\rho_2\nu_2}\omega_{\alpha_1+\rho_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,\tfrac{1}{2^{\nu_1}},\tfrac{1}{2^{\nu_2}})_p\ll$$

$$\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}} t_1^{-\rho_1-\frac{1}{p}}t_2^{-\rho_2-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\rho_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\rho_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2},$$

что и требовалось доказать.

6.2. Доказательство пункта 2 теоремы 3. Доказательство пункта 2 теоремы 3 аналогично доказательству пункта 1 теоремы 3.

7. ДОПОЛНЕНИЯ

1. Докажем, что неравенства

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\equiv B_1(f,\delta_1,\delta_2)\tag{10}$$

и

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty\ll\int\limits_0^{\delta_2}\int\limits_0^{\delta_1(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{\frac{1}{\alpha_1 p'}}}(t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\equiv B_2(f,\delta_1,\delta_2)\tag{11}$$

не сравнимы при $\alpha_1>\gamma_1>\frac{\alpha_1}{2}$.

Пусть $g_2(x),g_6(x)$ есть функции, определенные в лемме 12. Рассмотрим функцию $F_1(x_1,x_2)=g_2(x_1)g_2(x_2)$.

Так как $B_1(F_1,\delta_1,\delta_2)=D(g_2,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, $B_2(F_1,\delta_1,\delta_2)=A_1(g_2,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, то, применяя лемму 12 (б) при $\gamma_1<\alpha_1(i=1,2)$, будем иметь

$$\frac{B_1(F_1,\delta_1,\delta_2)}{B_2(F_1,\delta_1,\delta_2)}\asymp\frac{1}{\delta_1^{\alpha_1-\gamma_1}(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{1-\frac{1}{p}}}\to\infty\tag{12}$$

для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1\to0$.

Теперь рассмотрим функцию $F_2(x_1,x_2)=g_6(x_1)g_2(x_2)$.

Так как $B_1(F_2,\delta_1,\delta_2)=D_1(g_6,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, $B_2(F_2,\delta_1,\delta_2)=A_3(g_6,\delta_1)D(g_2,\delta_2)$, то при $\alpha_1>\gamma_1>\frac{\alpha_1}{2}$ имеем

$$\frac{B_2(F_2,\delta_1,\delta_2)}{B_1(F_2,\delta_1,\delta_2)} \asymp \left(\log_2\frac{2}{\delta_1}\right)^{\frac{1}{2p'}} \to \infty \tag{13}$$

для любого фиксированного δ_2 и $\delta_1 \to 0$.

Из соотношений (12) и (13) следует, что правые части неравенств (10) и (11) не сравнимы. В каждом конкретном случае более точные результаты могут быть получены иногда при применении теоремы 1, а иногда при применении утверждения a).

3. Аналогично рассуждая, можно показать, что неравенства (10) и

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\big(f,\delta_1,\delta_2\big)_\infty \ll \int\limits_0^{\delta_2(\log_2\frac{2}{\delta_2})^{\frac{1}{\alpha_2 p'}}} \int\limits_0^{\delta_1} (t_1t_2)^{-\frac{1}{p}}\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,t_1,t_2)_p\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2} \tag{14}$$

не сравнимы при $\alpha_2 > \gamma_2 > \frac{\alpha_2}{2}$.

В каждом конкретном случае более точные результаты могут быть получены иногда при применении теоремы 2, а иногда при применении утверждения a).

3. Аналогично рассуждая, можно показать, что неравенства (11) и (14) не сравнимы при $\alpha_i > \gamma_i > \frac{\alpha_i}{2}(i=1,2)$.

В каждом конкретном случае более точные результаты могут быть получены иногда при применении теоремы 1, а иногда при применении теоремы 2.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изучена взаимосвязь между смешанными модулями гладкости дробного порядка в метриках L_p и L_∞, где $1<p<\infty$. В теоремах 1 и 2 доказаны оценки сверху (3) и (5) для смешанного модуля гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty$, выраженные через смешанные модули гладкости $\omega_{\alpha_1+\frac{1}{p},\gamma_2+\frac{1}{p}}(f,\delta_1,\delta_2)_p$ и $\omega_{\gamma_1+\frac{1}{p},\alpha_2+\frac{1}{p}}(f,\delta_1,\delta_2)_p$ соответственно. Показано, что эти оценки более точные, чем интегральные оценки (1) и (2) для смешанного модуля гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f,\delta_1,\delta_2)_\infty$, полученные ранее в работах [2]-[6].

Доказана неулучшаемость интегральной оценки (3) в том смысле, что если заменить в неравенстве (3) α_1 на $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1$, то существует функция $f_1(x_1,x_2) \in L_p^0$ такая, что соответствующее неравенство уже неверно. Кроме того, оно неулучшаемо в том смысле, что нельзя заменить входящий в интеграл $(\log_2\frac{2}{\delta_1})^{1-\frac{1}{p}}$ на другую положительную слабо колеблющуюся функцию $\xi(\delta_1) = \bar{\bar{o}}\big(\log_2\frac{2}{\delta_1}\big)^{1-\frac{1}{p}}$. Далее, показано, что нельзя улучшить оценку (3), заменив в ней $\gamma_2 < \alpha_2$ на α_2. В таком же смысле неулучшаема оценка (5). Исследована взаимосвязь ранее полученной оценки (10) с вновь полученными оценками (3) и (5), а также взаимосвязь между (3) и (5). А именно, доказано, что неравенства (3), (5) и (10) в общем случае имеют самостоятельное значение и не вытекают друг из друга.

В теореме 3 получены интегральные оценки сверху для смешанного модуля гладкости $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f^{(\rho_1,\rho_2)},\delta_1,\delta_2)_\infty$, где $f^{(\rho_1,\rho_2)}-$ производная в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)\in L_p^0$ порядка $\rho_1 \geq 0$ по переменной x_1 и порядка $\rho_2 \geq 0$ по переменной x_2.

Список литературы

1 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1975.

2 Simonov B., Tikhonov S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness// Journal of Approx. Theory. -2010. -Vol. 162. -Is. 9. -P. 1654-1684.

3 Потапов М. К., Симонов Б. В., Тихонов С. Ю. Соотношениях между смешанными модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского// Тр. МИАН. -2010. 269. С. 204-214.

4 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Модули гладкости дробных порядков, Часть II. -Москва: Попечительский Совет механико–математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, 2015.

5 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Дробные модули гладкости. -Москва: МАКС Пресс, 2016.

6 Потапов М.К., Симонов Б.В. Связь между смешанными модулями гладкости в метриках L_p и L_∞ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. -2017. 3, 21-35.

7 Domingues O., Tikhonov S. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities, http://arXiv: 1909.12818v2 [math.FA] 22 Nov 2019.

8 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1977.

9 Унинский А.П. Неравенства в смешанной норме для тригонометрических полиномов и целых функций конечной степени// Материалы Всесоюзного симпозиума по теоремам вложения, Баку. -1966. -С. 212-218.

10 Tikhonov S. Trigonometric series of Nikol'skii classes// Acta Math. Hungar. -2007. -Vol. 114. -No 1-2. –P. 61-78.

М.К. Потапов [1] , Б.В. Симонов [2]

[1] *М.В. Ломоносов Мәскеу мемлекеттік университеті, Мәскеу, Ресей*
[2] *Волгоград мемлекеттік техникалық университеті, Волгоград, Ресей*

L_p ЖӘНЕ L_∞ МЕТРИКАЛАРЫНДАҒЫ АРАЛАС ТЕГІСТІК МОДУЛЬДЕРІ АРАСЫНДАҒЫ БАЙЛАНЫСТАРДЫ НАҚТЫЛАЙТЫН ТЕҢСІЗДІКТЕР

Аннотация: L_q кеңістігінде жататын функциялардың тегістік модульдерін олардың L_p -дағы тегістік модульдері тұрғысынан бағалау проблемасы белгілі. Тегістік модульдерін бағалаудың бірінші кезеңі Липшиц кластарынан алынған функциялардың қасиеттерін зерттеу және Титчмарш, Харди, Литтвуд, Никольский жұмыстарындағы олардың сәйкес енгізулерін алу болып табылады.

Липшиц кеңістіктері үшін классикалық Харди-Литтвуд кірістіруі бір айнымалы функцияның үзіліссіздік модулі үшін Ульянов теңсізігінің қолдану нәтижесінде алуға болады. Ульянов жұмыстарында оң бүтін ретті тегістік модульдері қарастырылады. Бөлшек ретті тегістік модульдерін енгізу Потапов, Симонов, Тихонов еңбектерінде Ульянов теңсіздігін күшейтуге мүмкіндік берді. Аралас тегістік модульдеріне бағалаулар ала отырып, кейінрек, сол авторлар Ульянов теңсіздігін екі айнымалы функция жағдайына жалпылады. Бұл теңсіздіктердің дәлдігі $1 < p < q < \infty$ және $1 = p < q = \infty$ жағдайларында дәлелденді.

Мақалада екі айнымалы функциялар үшін бөлшек ретті аралас тегістік модульдері зерттеледі. $1 < p < q = \infty$ жағдайында L_p және L_q метрикаларындағы аралас тегістік модульдері арасындағы бұрын белгілі Ульянов типті теңсіздіктерін нақтылайтын тңсіздіктер алынды. Алынған бағалаулардың нақтылығы зерттелді. Осы және бұрын белгілі болған бағалаулардың өзара байланысы зерттелді.

Түйін сөздер: теңсіздік; метрика; бөлшек ретті аралас тегістік модульдері

M.K. Potapov [1] , B.V. Simonov [2]

[1] *Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia*

INEQUALITIES REFINING RELATIONSHIPS BETWEEN MIXED MODULES OF SMOOTHNESS IN METRICS OF L_p AND L_∞

Abstract: The problem of estimating the moduli of smoothness of functions from Lq in terms of their moduli of smoothness from Lp is well known. The first stage in the estimation of moduli of smoothness was the study of the properties of functions from the Lipschitz classes and obtaining the corresponding embeddings in the works of Titchmarsh, Hardy, Littlewood, Nikol'skii.

The classical Hardy-Littlewood embedding for Lipschitz spaces can be obtained as a consequence of the Ulyanov's inequality for the moduli of continuity of a function of one variable. In the works of Ulyanov, the modulus of smoothness of natural order was considered. The introduction of fractional moduli of smoothness made it possible in the works of Potapov, Simonov, Tikhonov to strengthen the Ulyanov's inequality. Later, the same authors were able to generalize Ulyanov's inequality to functions of two variables, obtaining estimates for mixed moduli of smoothness. The sharpness of these inequalities was proved in the case when $1 < p < q < \infty$ or $1 = p < q = \infty$.

In this article, we study mixed moduli of smoothness of fractional orders of a function of two variables. Inequalities are obtained that refine the previously known estimates of the Ulyanov type inequalities between mixed moduli of smoothness in the metrics Lp and Lq for values $1 < p < q = \infty$. The accuracy of the obtained estimates is investigated. The relationship between these and previously known estimates has been studied.

Keywords: inequality; metrics; mixed fractional moduli of smoothness

References

1 Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolsky S.M. Integral'nye predstavleniya funkcij i teoremy vlozheniya[Integral representations of functions and embedding theorems]. (Science, Moscow, 1975).

2 Simonov B., Tikhonov S. Sharp Ul'yanov-type inequalities using fractional smoothness, Journal of Approx. Theory, 162(9), 1654-1684(2010).

3 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S. Yu. Sootnosheniyah mezhdu smeshannymi modulyami gladkosti i teoremy vlozheniya klassov Nikol'skogo[Relations between mixed moduli of smoothness and class embedding theorems Nikolsky], Tr. MIAN. 269, 204-214(2010).

4 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S.Yu. Moduli gladkosti drobnyh poryadkov, CHast' II [Modules of smoothness of fractional orders, Part II.] (Board of Trustees Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University Lomonosov, Moscow, 2015).

5 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S.Yu. Drobnye moduli gladkosti[Fractional moduli of smoothness]. (MAKS Press, Moscow, 2016).

6 Potapov M.K., Simonov B.V. Svyaz' mezhdu smeshannymi modulyami gladkosti v metrikah L_p i L_∞ [Relationship between mixed moduli of smoothness in the metrics L_p and L_∞], Vestn. Moscow un-that. Ser. 1. Mat., Fur. 2017. 3, 21-35.

7 Domingues O., Tikhonov S. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities, http://arXiv: 1909.12818v2 [math.FA] 22 Nov 2019.

8 Nikolsky S.M. Priblizhenie funkcij mnogih peremennyh i teoremy vlozheniya [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. (Science, Moscow, 1977).

9 Uninskiy A.P. Neravenstva v smeshannoj norme dlya trigonometricheskih polinomov i celyh funkcij konechnoj stepeni[Inequalities in the mixed norm for trigonometric polynomials and entire functions of finite degree], Materialy Vsesoyuznogo simpoziuma po teoremam vlozheniya [Proceedings of the All-Union Symposium on Embedding Theorems], Baku. 1966. WITH. 212-218.

10 Tikhonov S. Trigonometric series of Nikol'skii classes, Acta Math. Hungar., 114(1-2), 61-78(2007).

Сведения об авторах:

Потапов М.К. – профессор, кафедра теории функций и функционального анализа, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова, Воробьевы Горы, д. 1, 119991, г. Москва, Россия.

Симонов Б.В. . – ***автор для корреспонденции***, доцент, кафедра прикладной математики, факультет технологии пищевых производств, Волгоградский государственный технический университет, пр. Ленина, 28, 400005, г. Волгоград, Россия.

Potapov M.K. – Professor, Department of theory of functions and functional analysis, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Vorobyevy Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.

Simonov B.V. – ***corresponding author***, Docent, Applied Mathematics, Food Engineering Faculty, Volgograd State Technical University, Lenin avenue, 28, Volgograd, 400005, Russia.

Поступила в редакцию 01.03.2021