МАТЕМАТИКА-ИНФОРМАТИКА
MATHEMATICS-COMPUTER SCIENCE

Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетiнiң хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы, 2018, 1(122), 8-69 беттер
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27, 20**

Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: ntmath10@mail. ru)

Предисловие Главного редактора журнала "Вестник Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика" о целях издания и путях их реализации

Аннотация: В статье определена научная политика Серии журнала как обеспечение вхождения Казахстана в 4-ую промышленную революцию в виде Программы *"Казахстан выходит на массовое производство математиков и IT-специалистов высшей квалификации с основательной базовой подготовкой и опытом решения задач на переднем крае математики-информатики со значимыми и фундаментальными результатами"*.

Определен авторский ИТМиНВ-путь исполнения научной политики Серии: в полном объеме в формате "*Вопрос-Ответ*" дана Заключительная программа Школьной математики, освоивший которую может успешно обучаться в любом университете мира, с переходом в "*Математикалық анализ*", усвоение которого обеспечит "*математическую зрелость*" с последующим постижением опять же авторских "*Мера и интеграл Лебега*" и "*Теория вероятностей*", что в совокупности определит готовность к научной работе по 20-ти авторским направлениям и темам с 70-процентной и выше форой, гарантированно выводящей на самые передовые позиции в международной математике-информатике.

Математика наука систематическая, поэтому учебный материал для её усвоения от полной школьной программы с первого по последний классы должен составлять единое взаимосвязанное течение по принципу "*каждая мысль является основанием следующей*", с переходом в программный материал школы высшей. В целом школьная и вузовская программы должны обеспечить формирование "математической зрелости", в которой, обычно возводимое в самое главное, решение задач занимает свою специфическую сферу, когда осмысленное вхождение в своеобразный мир математики поддерживает задачный материал в форме различных специальных приемов и методов, с последующим их распознаванием и реализацией в предложенных заданиях. И все эти требования полностью обеспечивают авторские учебники ИТМиНВ, - это школьный учебник, созданный в ранге победителей Конкурса МОН РК 2000 года под названием "*Алгебра и начала анализа для X-XI классов*" в формате "*Авторский коллектив - Издательство*" и фундаментальный курс "*Математикалық анализ*" в 70 печатных листов, созданный по решению Научно-методического совета по математике Министерства высшего образования Каз ССР 1979 года, со вторым изданием в 2018 году.

Здесь, по-видимому, нелишне обратить внимание на малую эффективность преподавания одной формирующей понимание отдельной области науки одновременным применением нескольких учебников с различными методическими установками (типа учебников "Геометрии" А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна). Дело в том, что если это учебник автора (коллектива авторов) с цельным пониманием и видением науки, то смешение разных подходов к освещению дисциплины вызовет хаос в сознании обучающегося. Тогда как полное прохождение курса по одному фундаментальному учебнику с последующим беглым ознакомлением с другими учебниками принесет несомненную пользу в смысле *"Оказывается эту тему можно излагать и так"*. Вообще, всегда надо иметь ввиду *Принцип сохранения трудностей*, когда на большом пространстве изложения дисциплины *"Выигрыш в одной теме влечет проигрыш в другой"*.

Далее, приведённые в тексте в виде "Вопрос-Ответ" Оглавления дают полный перечень необходимого и достаточного материала одновременно и в минимальном, и в подробном систематизированном

изложении, что, думается, будет весьма полезным как вполне определенная, стало быть, реально достижимая грань требуемого для вооружения личности "математической зрелостью" с последующей отдачей во всех перипетиях собственной жизни настолько, насколько эффективна и значима математика как метод и как нравственная наука. И, наконец, можно надеяться, что научные поиски по 20-ти направлениям и темам ИТМиНВ, *наряду с другими качественными отечественными исследованиями* полностью обеспечат Серию журнала публикациями международного уровня.

Таким видится развитие математики-информатики в современном Казахстане без каких-либо претензий на экспорт – каждая страна со своей наукой разберётся сама.

Ключевые слова: Математика-информатика, Механика, Четвертая промышленная революция, Цифровой Казахстан, Комплексная программа ИТМиНВ.

Четвертая промышленная революция стремительно врывается в вечный путь Человечества.

Место Казахстана в ней видится таким: **"Кредо Института теоретической математики и научных вычислений (ИТМиНВ) по 4-ой промышленной революции:** *Казахстан выходит на массовое производство математиков и IT-специалистов высшей квалификации с основательной базовой подготовкой и опытом решения задач на переднем крае математики-информатики со значимыми и фундаментальными результатами. Тогда для такого качества специалистов исполнение текущих задач "Цифровой экономики", "Казахстанского кибернетического щита" и им подобных превращается в "рутинный" процесс, пусть иногда даже с элементами творчества"*, чему в основном будет подчинена научная политика Серии.

Одновременно Серия журнала будет нацелена на международное сотрудничество на паритетной основе, с предоставлением до половины объема зарубежным авторам.

Состав Редакционной коллегии Серии журнала – международный, и мы благодарим зарубежных коллег за сотрудничество.

Казахстанские представители Редколлегии осознают, что Серия журнала по своим трем отраслям науки не менее чем на половину должна быть заполнена статьями международного уровня отечественных авторов, что на новом переломном этапе, созданном Четвертой промышленной революцией, требует принципиально новой организации образования и науки Казахстана.

Именно, во исполнение этих новых задач была выдвинута

Комплексная программа ИТМиНВ на 2018-2020 годы

Проект №1. Математика и информатика от ИТМиНВ для обеспечения 4-ой промышленной революции в Казахстане путем подготовки большого количества математиков и IT-специалистов высшей квалификации, и, как следствие, превращение исполнения Президентских программ "Цифровой Казахстан" и "Казахстанский кибернетический щит" в рутинный процесс. В процесс типа *"Умение копать землю лопатой"*, чем все владеют, но если получено задание выкопать канал, то это стандартный трудоемкий процесс, сводящийся к парадигме "Бери больше, кидай дальше" без потребности в исследовательской работе, – то же с цифровизацией предприятий и всех других задач, ныне изолированно возведенных в научный ранг. Что в условиях, мягко скажем так, недостаточной профессиональной подготовки будет иметь всего лишь *"кустарный"* уровень изготовления, годный лишь для взаимной договоренности. Другое дело, – нестандартное использование компьютерной и основанной на ней техники для специфических нужд Казахстана, требующее действительно исследовательско-программной работы, доступной только высококлассным математикам и IT-специалистам, с базовой подготовкой на уровне подсознательной "математической зрелости" и опытом проведения НИР со значимыми и фундаментальными результатами.

Проект №2. Многоуровневый "Математикалық анализ" выпустить на казахском, русском (с изданием в Москве как *"Перевод с казахского"*) и первоклассном английском языке и разобрать на Программы по требованиям специальностей с математическими дисциплинами бакалавриата, магистратуры и PhD.

Проект №4. Новый Классификатор специальностей и новый Государственный стандарт образования по математике, информатике и прикладной математике от ИТМиНВ, с вводом в действие уже в 2018-2019 учебном году. Специальности новые: *"Математика"* скорее теоретическая, *"Прикладная математика и информатика"* с упором на математику с выходом на Информатику, в частности, как расширение *"Математическое и компьютерное моделирование"*, и *"Информатика и прикладная математика"* как Информатика на основе математических исследований и методов.

Бакалавриат: по категории "Фундаментальные дисциплины" в необходимом количестве часы будут отведены базовой подготовке (Анализ математический и действительный, Алгебра, Геометрия, Начала Информатики), основные дисциплины (Анализ комплексный, функциональный, численный, Дифференциальные уравнения обыкновенные и в частных производных, Теория вероятностей, Математическая статистика, Информатика как цикл основополагающих дисциплин типа "Алгоритмика", "Прикладная теория чисел", "Формальные грамматики" и т. п.) как эффективные введения в соответствующие области математики-информатики. Все обязательные – фундаментальные и основные – дисциплины снабжаются жесткими подробными программами с 15-процентной свободой для лектора, с указанием основной литературы с точностью до страниц и дополнительной, - здесь никаких других учебных документов не требуется. Вариативная часть программы – здесь закрепляется только количество часов на специальные курсы, наполнение которых зависит от кадрового состава вуза, с составлением силлабусов и иных документов.

Магистратура: все дисциплины только по специальности, безо всяких "Психологий", "Педагогик" и т. п. , только английский. Поскольку магистратура преследует профессиональную подготовку, то единственная дисциплина не по специальности - иностранный язык, как правило, язык английский. Общие обязательные дисциплины магистратуры формируются в виде обзорных, но с выборочными доказательствами, программ: Анализ, Алгебра и Геометрия, Вычислительная математика, Информатика, Теория вероятностей, Математическая статистика, Дифференциальные уравнения с жесткой официальной программой с указанием литературы с точностью до страниц и 20-процентной свободой для лектора.

Докторантура: по выбору научных руководителей.

Здесь приведен полный список дисциплин, количество отводимых часов на которые регулируется по трем специальностям раздельно. Академическая свобода воплощается через вариативную часть, со всей требуемой документацией от лектора.

Проект №5. Создание ИТМиНВ в 2018-2020 годах на уровне сигнальных экземпляров Полного комплекта учебников и программ по школьной математике с первого по последний классы с позиций *"математической зрелости"* и на основе пробных лекций по методическим решениям прямого применения ИТМиНВ конкретных тем школьной математики с целью выявления и учета возрастных возможностей учащихся.

Проект №6. В средней школе математика будет обеспечена Полным комплектом учебников – без ошибок (это гарантированно), максимально короткое через "только нужное" и предельно доступное изложение в рамках возможного. Во исполнение Послания Президента РК 2018 года в части *"В среднем образовании начат переход на обновленное содержание, который будет завершен в 2021 году"* вся школьная программа создается в ключе *"Математике и английскому языку – учебные часы в востребованном количестве, остальное подстраивается".* Это предложение основывается на Послании Президента 2017 года в части *"Без овладения английским языком Казахстан не достигнет общенационального прогресса. Необходимо тщательно рассмотреть этот вопрос и принять по нему разумное решение"* и на Послании 2018 года в части *"Необходимо усилить качество преподавания математических и естественных наук на всех уровнях образования".*

В связи с чем вспоминается, что первые бизнесмены Алма-Аты 90-х годов, а это были самые продвинутые *"жизненно направленные"* крепкие ребята, так говорили об учебных потребностях своих детей *"Главное – математика и английский, остальное приложится",* по-видимому, они были правы.

Проект №7. ИТМиНВ к 2018-2019 учебному году создает новый Государственный стандарт образования по школьной математике, в котором центральным является обеспечение *"математической зрелости учащихся"* через *"математическую зрелость учителей"* по доминирующему использованию "Математикалық анализ" (подробности в "Кiрiспе") и методических решений прямого применения по всем темам школьной математики от ИТМиНВ.

Проект №8. ИТМиНВ предлагает однозначный, понятный всякому, жесткий обязательный документ *"Общие принципы экспертизы и создания школьных учебников и программ с качественным показателем "По которым можно учить и учиться"* с пилотной реализацией через ИТМиНВ.

Проект №9. Так же, как каждый гражданин должен иметь паспорт своей страны, так и каждый сотрудник НИИ и ППС вуза должен ежегодно заполнять *"Научный и научно-методический паспорт"* как обязательное условие нахождения в системе МОН РК. Каждое подразделение МОН РК должно иметь специальный Портал, на котором вывешиваются все, без исключения "Научные и научно-методические паспорта" каждого сотрудника.

Проект №12. Научная и образовательная политика РК формируется только на основе *"Национальный научный фонд РК – Научная картина РК"* через индивидуальные Научные и научно-методические паспорта с подтверждением в *Фундаментальных и Значимых достижениях научных школ и индивидумов в контексте международной науки.*

Проект №13. Временная мера (до масштабной реализации Проекта №4 с реальной отдачей) подготовки математиков-информатиков в регионах по Программе ИТМиНВ – базовая подготовка, вхождение в тему и научная работа по теме от ИТМиНВ, с демонстрацией результатов в ведущих мировых научных центрах как казахского-казахстанского нового и сильного.

Комплексная программа – это Система многолетних практически внебюджетных разработок, в которых главными являются основанный на статьях [1-65] Проект №1 как обеспечение *"опыта решения задач на переднем крае математики-информатики со значимыми и фундаментальными результатами"* и Проекты №2 и №5 с полным списком вопросов, которые надо усвоить на уровне подсознания и потому выписанные в виде Оглавлений учебников с ответами на них как обеспечение *"основательной базовой подготовки"* в реализации "Кредо".

Отдельно подчеркнем, что на данном этапе состояния математики-информатики РК должны быть жесткие программы, поскольку математика наука систематическая: как на ветхой дырявой одежде одна, пусть даже суперзаплатка, не сделает её стильной (презентабельной), так и без нахождения в математическом мире, что в рамках возможного, надеемся очень близко к его границе, было сделано в заключительном школьном учебнике для X-XI классов с переходом на 1600-страничный "Математикалық анализ", любой даже самый талантливый отдельный эпизод не будет понят "до основания" с последующим искренним восхищением и погружением в "счастье познания".

Также отметим, что образовательная часть в [66-73] естественным образом переходит в Проект №1, ибо создана по опыту понимания математики-информатики при его научном наполнении. Именно по такой же причине преподаватель вуза должен заниматься наукой для понимания своей дисциплины, как правило, состоящей из веками отобранного ("Я видел дальше других только потому, что стоял на плечах гигантов. И. Ньютон"), что называют классикой.

* * *

Обсудим в отдельности каждый из выделенных Проектов.

Обоснование к Проекту №1: Особую роль математики-информатики в 4-ой промышленной революции ИТМиНВ видит в том, что решение принципиальных вопросов численного анализа и информатики на конкурентном международном уровне обеспечивает подготовку специалистов высшей квалификации во всех регионах Казахстана, способных к решению любых практических задач на уровне возможностей бурно развивающихся компьютерных технологий.

Если на сегодня значимым предвестником надвигающейся 4-ой промышленной революции является 3D-печатанье от сложных технических изделий и зданий до человеческих органов без отторжения, то никто не может предугадать, что ожидается в будущем. Например, уже, как говорят, "на слуху" квантовые компьютеры с фантастическими скоростями и объемами перерабатываемой информации.

* * *

Сложившееся к настоящему времени научное положение РК требует, чтобы научные публикации без иностранных соавторов соотносились к остальным в отношении 10:1, с обязательным потенциалом дальнейшего развития и обязательным подтверждением обзорными статьями ***Фундаментальные и значимые достижения, их место и перспективы в контексте международной науки.***

Наверное необходимость таких требований нуждается в пояснениях.

Есть (по крайней мере в период расцвета Московской математической школы был, сейчас - не знаю) требование, можно сказать *"По Гамбургскому счету"*, к докторской диссертации –

всякому с образованием в два курса физико-математической подготовки в течение пяти минут объяснить свой основной результат.

В творческом поиске все непредсказуемо, человек изменяется как бы находясь в условиях смертельной битвы: "**А. Н. Колмогоров** - *В моих занятиях математикой есть какой-то дефект воли: приближаясь к удачному решению задачи, я как-то увиливаю от немедленного выяснения положения"*. Действительно, никто не может планировать фундаментальный результат, человеку не дано предвидеть даже обычный нетривиальный результат, – как верно сказано *"Если кто-то способен предсказать, чем закончатся его исследования, то эта проблема не очень глубока и, можно сказать, практически не существует.* ***А. Шильд"***.

Здесь надо понимать, что количество статей не всегда совпадает с качеством результатов: мы не уверены, что сотни статей в престижных зарубежных научных журналах могут обеспечить защиту докторской диссертации по советским требованиям. Одна статья может быть источником большого количества других, развивающих заложенное фундаментальное в ней – именно это, надеемся, будет продемонстрировано ниже в 33 конкретных сообщениях от постановки задачи до результата, в устном изложении текста по минуты 3 каждая.

Великий организатор математики Казахстана Ибрашев Хасен Ибрашевич в 1957 году принял физико-математический факультет КазГУ без единого этнического казаха на полной ставке по математике и в 1970 году оставил свой пост с полным набором кандидатов наук (тогда не было "сплошной" докторизации, да и в условиях даже либеральных требований нигде быть не может) для Казахстана, подготовленных в Новосибирске, Москве, Ленинграде и Киеве. Тогда по-другому Х. И. Ибрашев поступить не мог – в Казахстане не было, мягко говоря, в нужном количестве продуктивных научных руководителей, но в независимом Казахстане мы ставим цель обеспечения студентов и молодых преподавателей любого из вузов Казахстана возможностью включения в международную математику-информатику со "*своим лицом*", что во многом реализовано и о чем, при случае, в СНГ открыто заявляем *"Мировая математика-информатика без Н. Темиргалиева и ИТМиНВ обойдется, мы беспокоимся о своих казахах и казахстанцах, чтобы могли достойно чувствовать себя в международном научном пространстве"*. Конечно, такие слова, быть может, еще как-то воспримут во Франции, Германии и Англии, но никак не в США, что мы и соблюдаем.

В научно-содержательном отношении для ИТМиНВ в контексте *"с 70%-ой и выше форой"* ориентиром (как говорят, на почтительном расстоянии) является П. Л. Ульянов, который в разработанной классиками Тичмаршем, Харди и Литтлвудом, С. Л. Соболевым, С. М. Никольским и О. В. Бесовым теории вложений сказал свое главное слово – новая постановка задачи с полным решением в модельной ситуации на основе авторского аналитически глубокого эффективного метода с большим потенциалом продолжений, и отступил, создав научные "рабочие места" в той теме, востребованные, спустя полвека, до сих пор. Мы тоже стремимся к результатам, в первую очередь фундаментальным, с потенциалом продолжений на десятилетия вперед, причем с разработанной техникой исследований. Сами продолжения тоже разные – и жестко однозначные и, напротив, с большим количеством реализаций, в основном вычислительных, с практическими применениями, что позволяет привлечь большое количество студентов, понятно, различной подготовки.

В результате, на весь Казахстан предлагаются следующие темы исследований, каждая из которых подкреплена оригинальными публикациями в некоммерческих журналах по базам Web of Science и Scopus:

НАУЧНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ИТМиНВ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА №1

Направление 1. Компьютерный (вычислительный) поперечник (К(В)П) как синтез известного и нового в численном анализе, который, согласно К. Флетчеру, "включает в себя в качестве составных частей формулировку задачи, математический анализ, построение алгоритма и доведение компьютерной программы до того, чтобы она давала результаты"

Тема 2. Классы (и пространства) функций, что, по словам А. Н. Колмогорова, решает проблему "Нас много", т. е. "многих" обеспечить публикациями

Направление 3. Математический инструментарий прямого применения: алгебраическая теория чисел в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного интегрирования и теории случайных чисел

Направление 4. Математический инструментарий прямого применения: тензорные произведения функционалов в сочетании с гармоническим анализом в задачах численного анализа, восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных по значениям начальных и граничных условий в точках

Направление 5. Иррегулярные распределения и метод квази-Монте Карло как, согласно К. Роту, перспективные направления исследований в математике-информатике XXI века с обширными применениями

Тема 6. Восстановление функций в контексте К(В)П

Тема 7. Численное дифференцирование функций в контексте К(В)П

Тема 8. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте К(В)П

Направление 9. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: конструирование вероятностных мер на классах функций

Тема 10. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов численного интегрирования "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций

Тема 11. Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа: погрешности методов восстановления функций и дискретизации решений уравнений в частных производных "в среднем" относительно вероятностных мер на классах функций

Направление 12. Теория вложений и приближений - решенные и нерешенные задачи

Тема 13. Ряды Фурье: преобразования коэффициентов и суммирование

Направление 14. Предпоперечник Колмогорова от Мирболата Сихова

Тема 15. Теория "Морри" не как "тривиальные обобщения заменой нормы Лебега на норму Морри"

Направление 16. Дискретные и быстрые "алгебраические" преобразования Фурье

Направление 17. Генераторы случайных чисел в контексте новых формул дискретных "алгебраических" преобразований Фурье. Генерирование случайных чисел Лехмера с максимальным периодом по требованиям Ковею-Макферсона и обширные их применения

Направление 18. "Геометрия чисел" в контексте алгебраической теории чисел

Направление 19. Метод Галеркина и новые теоретические разработки с последующими применениями в контексте всегда сопровождающей его уязвимости

Направление 20. К(В)П - анализ бесконечно гладких функций от Ерика Нурмолдина

с потенциалом разработок в десятках и сотнях статей, обоснованных в авторских Обзорах по математике-информатике в контексте международной науки [62-65].

* * *

В математике в разное время в различных странах возникают свои сложности: в Московском математическом обществе на Заседании 19 сентября 1967 г. Президент И. М. Гельфанд отметил две основные задачи Общества:

Во-первых, это борьба с провинциализмом в математике (счастлива страна с такой проблемой – Н. Т.)...

Во-вторых, последовательно отстаивать эту точку зрения, что развитие математики есть развитие идей, а не цепь технических достижений. Стремление решить трудную задачу вполне объяснимо и заслуживает внимания, ибо часто трудные задачи являются пробным камнем для отделения подлинного научного достижения от чисто словестного. Но в этом стремлении зачастую прослеживается и другая, пугающая сторона – постепенно развивающееся "технократическое" презрение к идеям.

В современном Казахстане, пожалуй, наиболее приемлемый путь это Комплексная программа ИТМиНВ на 2018-2020 года, в научной основе которой лежат следующие оценки результативности.

Наука делится (здесь четких границ нет, все достаточно условно, но различимо) на области, области на направления, направления – на темы и тематики, далее с приставкой "под" – на подтемы и подтематики, подподтемы,. . . .

В огромном мире научных журналов сами по себе публикации не являются твердой гарантией качества сообщаемых в них результатов, и потому надо определиться в шкале оценок научных результатов через их эшелонирование по категориям: **Высшая категория** – фундаментальный результат на уровне направления, **Первая категория** – значимый результат с возможностью внятной содержательной формулировки на уровне темы, **Вторая категория** - результат, говоря словами П. Л. Ульянова, с "*кисло-сладкой*" оценкой содержания на уровне темы и тематики, **Третья категория** – научно "*безликие*" публикации, пусть даже в журналах с импакт-фактором.

1. Фундаментальный результат (ФР) - вносящий существенную ясность в основы и, через него, в содержание направления через дальнейшее развитие или же его закрывающий. Краткая и понятная для всякого с образованием в два начальных курса в области науки постановка задачи и формулировка ответа в контексте международной науки, принимаемая всеми, вне обращений к специалистам, без всяких возражений.

Различают

ФРсП: Фундаментальный результат с потенциалом продолжений

ФРбезП: Фундаментальный результат без потенциала продолжений

Фундаментальные результаты по своей природе могут быть различными. Но их объединяет одно: новая фундаментальная идея вызывает новый всплеск активности, как говорил Д. В. Печерский *"Результаты сыплются как из рога изобилия"*.

2. Значимый результат (ЗР): тема или тематика развивается, обрастает результатами и надо оценивать место в них конкретного результата – здесь требуется ответственный специалист.

Значимые результаты в контексте темы и тематики как специализированной (узкой) части направления, которые должны носить характер внятных содержательных результатов (что в науке получить непросто).

Также различают

ЗРсП: Значимые результаты с потенциалом продолжения, – во всей глубине и полноте решена конкретная задача с разумной и внятной формулировкой, что дает возможность для постановки аналогичных задач по теме и, что поднимает ценность данной статьи, с разработанными идеями и техникой для их решения.

ЗРбезП: Значимые результаты без потенциала, – завершающее звено в длинной цепочке продвижений по конкретной задаче.

3. Вторая и третья категории составляют **ЛД: личные достижения как этап собственного научного движения по восходящей.**

Фундаментальные результаты как "Вклад Казахстана в мировую науку" – полный список результатов за все творческое время по сегодня, отвечающих требованию *"До нас, наш вклад, после нас"* в контексте международной науки, в котором определяющим является составляющий во всей своей совокупности *"Наш фундаментальный вклад" как "Конкретный вклад Казахстана в мировую цивилизацию"* (здесь и далее указанные номера означают статьи из списка Литературы с тем же номером):

Всего 33 ФРсП:

ФРсП: 7. -8. В развитие фундаментального значения критерия вложения $H_p^\omega \subset L^q$ Ульянова (в достаточной части также Петре – Гривара – Головкина), дано полное решение задачи вложения в пространство Лоренца $H_p^\omega \subset L(\mu, \nu)$ с новым эффектом, заключающемся в установлении различия случаев $p = \mu$ и $p < \mu$.

Продолжение: В результате имеем следующее уточнение постановок задач, получающихся при замене лебеговской нормы на полунорму Лоренца, равно как на "Морри" и на другие аналогичные (об одном таком случае см. здесь [20]): основная цель исследования состоит в установлении всех возможных различных окончательных в том или ином смысле видов решений поставленной задачи.

ФРсП: 9. Найдены среднеквадратические погрешности детерминированных квадратурных формул и метода Монте-Карло относительно меры Банаха.

ФРсП: 10. Найдены среднеквадратические погрешности детерминированных квадратурных формул и метода Монте-Карло относительно мер, определенных безгранично делимыми распределениями.

Продолжение: соединение численного интегрирования и теории вероятностей в двух проявлениях.

ФРсП: 11. Как вспышка молнии 29 февраля 1988 года возник мощный метод построения квадратурных формул, основанный на теории дивизоров поля гауссовых чисел: соединение теоремы Ферма-Эйлера 1747 года доказательства с численным интегрированием.

ФРсП:13. Создан мощный (быть может, сильный из всех известных) метод численного интегрирования и восстановлении функций на основе применения теории дивизиров Куммера, относящегося к самым выдающимся достижениям математики XIX века, как распространения на многомерный случай теоремы Ферма-Эйлера 1747 года доказательства (в этом также состоял ранее незамеченный исторический факт).

Дано в определенном смысле полное решение известной проблемы построения эффективных алгоритмов для нахождения сеток Коробова в квадратурных формулах с равными весами.

ФРсП: 14. Представлено сочетание теоретико-вероятностного подхода к задаче численного интегрирования с теоретико-числовым методом построения квадратурных формул.

ФРсП: 16. На основе конкретизации общей теоремы Колмогорова о продолжении меры даны эффективные методы построения вероятностных мер на классах Никольского-Бесова, Никольского-Бесова-Аманова, Коробова и Соболева с ограниченным потенциалом различных применений в разных задачах как соединение теории функций с теорией вероятностей.

ФРсП: 17. На основе результатов П. Л. Ульянова (1990г.) определены новые классы функций, представляющие классификацию функций в широком диапазоне от предельно малой гладкости через известные классы Коробова до аналитических и их подклассов.

В качестве применения новой шкалы классов даны оценки погрешностей в них квадратурных формул Смоляка, полученных применением тензорных произведений функционалов.

ФРсП: 18. Показана действенность нового понятия "Информативной мощности данного набора функционалов" в случае всех возможных линейных функционалов в задаче восстановления функций из классов Соболева, Никольского и Бесова на основе нового мощного метода построения экстремальных функций.

ФРсП: 21. **"Компьютерный (вычислительный) поперечник" (К(В)П)** как казахская схема Научных вычислений с неисчерпаемым потенциалом продолжений.

В математике объект, описывающий что-то реальное, понимается как сложный и его с заданной точностью заменяют в том или ином смысле простым.

В зависимости от поставленных целей такие задачи образуют разделы математики, именуемые "Численный анализ" и "Теория приближений", к основным понятиям которых относится, в частности, понятие "поперечника".

Разные поперечники решают разные задачи, мы предложили **"Компьютерный (вычислительный) поперечник" (К(В)П)**, нацеленный на отыскание наилучших вычислительных агрегатов для реализации на компьютерах. Последовательно решаются две оптимизационные задачи – **два абсолюта:** нахождение точного (истинного) порядка восстановления по точной информации и построение экстремального вычислительного агрегата с установлением предельной погрешности получения приближенной информации с сохранением истинного. И, наконец, это в – третьих, на возможно большем множестве вычислительных агрегатов с тем же экстремальным свойством выясняется наличие или отсутствие таковых с большего порядка предельной погрешностью.

Долго, порядка десяти лет, в математическом мире наши идеи, как и все новое, воспринималось с настороженностью, но наши публикации в разных ведущих журналах есть свидетельство того, что признание пришло и мы на правильном пути (как нам сказал один профессор МГУ "Верной дорогой идете, товарищи!").

В постановке К(В)П-задачи требуется точная теорема вложения и, как часто оказывается, это можно воспринимать как принцип, неулучшаемое условие вложения даёт правильный порядок восстановления по точной информации.

В статье для классов H_p^ω этот принцип подтверждается с практической рекомендацией: если восстановление производится в L^q метрике с $1 \le p < q < \infty$, то, по П. Л. Ульянову, лучшей чем частичные суммы Фурье-Хаара, если же в равномерной, но лучше вычислительного агрегата Осколкова не существует. И это справедливо для для каждой функции $f(x)$ из $L^p(0,1)$, – достаточно в качестве $\omega(\delta)$ взять $\omega_p(\delta; f)$.

Продолжение – неограниченное, на все будущие времена.

ФРсП: 22. Численное интегрирование – "*К основным математическим моделям относится понятие интеграла – одна из центральных и постоянно повторяющихся тем в истории математики за последние два тысячелетия.* Ю. И. Манин".

При выполнении Проекта "Манхеттен" по созданию атомной бомбы в США возникла проблема вычисления интегралов высокой кратности и построения равномерно распределенных сеток (впоследствии оформленного в "метод Монте-Карло"), – занимался Иохим фон Нейман. То же повторилось при создании китайского ядерного оружия, занимались Вице-президент АН КНР Хуа Ло-Кен и академик АН КНР Вань Юань.

В СССР исследования проводились в научной школе Н. М. Коробова, по-видимому, самой успешной как в теоретическом, так и в вычислительном аспектах.

И так можно продолжить, например, большое количество статей выдающегося математика Эдмунда Хлавки и его школы (Австрия, ФРГ).

И все-же, несмотря на тысячи и тысячи статей и десятки монографий проблема решена не была, так в американском журнале "Contemporary Mathematics" академик АН КНР Вань Юань писал (1988 год): "По-видимому, одной из центральных проблем в численном интегрировании является нахождение прямых методов для получения оптимальных коэффициентов". В последнее время этот раздел математики относят к направлению "Научные вычисления".

Дано полное теоретическое решение проблемы, сформулированной Вань Юанем.

ФРсП: 24. Дано алгоритмические решение проблемы, сформулированной Вань Юанем. Для сравнения: вычислительные результаты знаменитой школы Н. М. Коробова, опубликованные в знаменитом Институте общей физики АН СССР (1990 г.) мы существенно улучшаем в [24]: миллион точек и точность 10^{-12} школы Коробова мы снижаем до полумиллиона точек, одновременно повышая точность до 10^{-13} (для ориентировки 10^{-9} метра есть нанометр).

Теперь по всему миру ищем опубликованные таблицы вычислений, чтобы проверить мощь нашего метода – сидим в Астане и уверены, что в том же смысле улучшим.

ФРсП: 25. В 1963 году в Докл. АН СССР была опубликована статья, повлекшая много публикаций; эта тема на Западе именуется как "Метод Смоляка". Нами был вскрыт механизм действия этого метода и в [25] на 42 страницах текста дано полное исследование одной самой популярной его реализации в виде квадратурной формулы.

ФРсП: 27. Введено (в начальном варианте в 2003 году в [17]) новое понятие "Тензорные произведения функционалов", на основе которой получены новые формулы переноса известного на данном количестве переменных на большие размерности. Показаны их вычислительные применения.

Продолжение: в конкретных реализациях имеет неограниченный потенциал получения новых вычислительных результатов в интегрировании, дифференцировании, решении уравнений в частных производных.

ФРсП: 29. Найдены точные порядки дискретизации в L^q- метрике решений уравнения теплопроводности с начальными условиями из классов Соболева вычислительными агрегатами, построенных по информации, полученных от всех возможных линейных функционалов.

Здесь раскрываются новые грани К(В)П-подхода, связанные с двумя и более начальными условиями.

ФРсП: 31. В данной работе исследуется задача дискретизации решения задачи Коши для волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева. Найден точный порядок погрешности дискретизации решений волнового уравнения по линейной информации, при этом полученные совпадающие по порядку оценки сверху и снизу представлены средними функциями конечных систем функций типа модуля гладкости, определяющих свойства функций из рассматриваемых классов.

В 1972 году В. И. Колядой были определены средние модули гладкости конечной системы модулей гладкости, определяющих анизотропные классы функций. Как оказалось, вопреки ожиданиям, средние модули гладкости, за исключением регулярных случаев, не могут полностью выражать неулучшаемые критерии вложения анизотропных классов.

Помимо самостоятельного интереса в задачах приближенного решения уравнений в частных производных, результаты данной статьи интересны тем, что определяются средним модулем гладкости в определении анизотропного обобщенного класса Соболева (при определенных условиях на составляющие модули гладкости).

ФРсП: 32. В теорию численного интегрирования внесено новое неожиданное понимание. Обычно от сетки эффективной квадратурной формулы требуется точная в степенной шкале скорость убывания дискрепанса её сетки узлов. Как оказалось, степень равномерной распределенности сетки, в том числе и сетки Смоляка, может быть очень плохой, но посредством подбора весов можно получить эффективную квадратурную формулу.

Более подробно место полученных результатов в контексте международной математики-информатики и дальнейшие перспективы их развития изложены в Обзорах – Темиргалиев Н. (см. [60-63]).

ФРсП: 33. В модельной ситуации – в гильбертовой метрике – решена задача нахождения предельной погрешности восстановления функций и решений уравнения Клейна-Гордона по неточной информации, полученной от произвольного конечного набора тригонометрических коэффициентов Фурье. Такого рода исследование, это полное К(В)П, с этим уравнением ранее не проводилось.

ФРсП: 34. В статье исследованы три конкретизации Компьютерного (вычислительного) поперечника – дискретизации решений волнового уравнения, численное дифференцирование и восстановление функций. Получены точные порядки, новые выводы типа "Интерполяционные многочлены Лагранжа наилучшие, если их менять правильно, - а именно в форме сплайнов".

ФРсП: 35. Для всякой периодической функции любого числа переменных с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье предложен общий алгоритм численного интегрирования, использующий индивидуальные свойства подынтегральной функций, что есть самый широкий метод из возможных в принципе. Тем самым, полученный результат можно понимать как завершающий (частично анонсированные в [21-22, 24]) по международно развиваемым теоретико-числовым методам приближенного вычисления интегралов высокой размерности, основы которой были заложены на семинаре Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова ("Трех Коль" как тогда говорили), начавшем работать в 1957 году в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР в Отделе теории чисел.

После работ о применении теоретико-числовых сеток к вопросам приближенного интегрирования, опубликованных в СССР в 1957-1959гг. , эти исследования были продолжены многими математиками как внутри страны, так и вне, результаты которых подытожены, наряду с монографиями Н М. Коробова 1963 и 2004 годов в монографиях Э. Хлавки, Хуа ло-кена и Вань Юаня, Л. Кейперса и Г. Нидеррейтера, в последующих многотысячных публикациях.

В данной работе дано решение сформулированной Вань Юанем (см. здесь п. 22 и 24) известной задачи в общем виде.

С. М. Ворониным и одним из авторов этой статьи в 1988 году был предложен метод, основанный на применении теории дивизоров в круговых полях алгебраических чисел, позволяющий в выражении погрешности учесть и устранить каждый "большой" коэффициент Фурье класса с одновременным разрежением спектра остальных коэффициентов. Дальнейшее развитие этой идеи показало, что данный алгоритм представляет собой гибкий метод построения квадратурных формул с учетом индивидуальных особенностей каждого класса периодических функций.

В статье дан алгоритм численного интегрирования произвольных функций, представимых в виде суммы абсолютно сходящегося кратного тригонометрического ряда Фурье (фактически, ввиду возможности периодизации, произвольной функции, причем с оптимизацией в прямой связи с ее индивидуальными свойствами). Получающиеся квадратурные формулы имеют равные веса, а узлы образуют сетку Коробова, которая полностью определяется заданием двух целых положительных чисел, одно из которых – количество узлов. Показано, что в случае классов функций с доминирующей смешанной гладкостью данный алгоритм почти оптимальный в том смысле, что сетка из N узлов находится за $<< N \ln \ln N$ элементарных арифметических операций. Также даны решения смежных задач.

Интерес к рассмотрению квадратурных формул Коробова, приспособленных к общему множеству "больших коэффициентов", вызван следующими обстоятельствами.

Во-первых, квадратурные формулы Коробова относятся к наиболее эффективным с вычислительной точки зрения как имеющие равные веса и, об этом говорилось выше, в сверхэкономном хранении сетки узлов, вне зависимости от их количества, в памяти ЭВМ, для чего требуются всего $(s+1)$ целых чисел.

Во-вторых, в случае интегрирования функций из классов, спектры "больших коэффициентов" которых есть "гиперболические кресты", соответствующие сетки узлов одновременно составляют содержание отдельной темы "Метод квази-Монте Карло".

В-третьих, в "общем случае" спектров "больших коэффициентов" как индивидуальной функции, так и функционального класса поиск сетки узлов сводится к проблеме из "Геометрии чисел", заключающегося в построении решетки с минимальным определителем, строки которых составлены из координат ее базисных векторов, имеющем пересечение с заданным множеством самое большее по нулевому элементу.

В-четвертых, квадратурные формулы Коробова обладают свойством ненасыщаемости (по крайней мере в шкале классов функций с доминирующей смешанной гладкостью).

ФРсП: 36. Классический результат теории вложений дополнен нетривиальными через переход от нормы Лебега к норме Морри. Классическая теорема С. Л. Соболева утверждает, что для вложения класса Соболева $W_p^r(0,1)^s\,(rp \neq s)$ в пространство равномерно непрерывных на $(0,1)^s$ функций $C(0,1)^s$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $rp > s$. С позиций теории вложений функциональных пространств и их приложений интересен вопрос о переходе к более узким классам r раз дифференцируемых функций с производными из $L^p(0,1)^s$, для которых выполнено вложение в $C(0,1)^s$ при $rp \leq s$. В статье анонсированы результаты по сформулированной задаче.

ФРсП: 37. В теорию суммирования тригонометрических рядов Фурье ядро Фейера вносит двоякий эффект. С одной стороны, ряд Фурье непрерывной функций может (неограниченно) расходиться в отдельных точках (дю Буа-Реймон, 1876 год), в то время как средние с ядром Фейера всякой непрерывной функции сходятся к ней равномерно. С другой стороны, средние Фейера обладают свойством насыщения.

Частичные суммы ряда Фурье непрерывной функции саму функцию приближают в логарифм раз хуже наилучших приближений тригонометрическими многочленами того же порядка (Анри Лебег, 1909 год). Средние Валле – Пуссена здесь логарифм заменяют на константу, но его порядок (количество гармоник) в два раза превышает порядок наилучших приближений.

В свете этих результатов из теории суммирования тригонометрических рядов возникает задача сравнительного изучения аппроксимативных возможностей агрегатов приближения "типа Смоляка" восстановления функций по их значениям в точках, построенных по ядрам Фейера, Дирихле и Валле-Пуссена.

В статье доказывается, что в классах Ульянова ситуация совпадает со случаем тригонометрических рядов Фурье: со средним Фейера повторяет свойство насыщения, но не со средними Дирихле (частичными суммами) и Валле-Пуссена, которые в степенной шкале приближают с наилучшей скоростью.

ФРсП: 38. Сформулированы задачи Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П) в различных конкретизациях, выводах и продолжениях. В рамках К(В)П полностью решена задача приближенного дифференцирования функций из многомерных классов Соболева по неточной информации, полученной от произвольного конечного множества тригонометрических коэффициентов Фурье.

ФРсП: 39. БПФ-мания после знаменитого результата Кули и Тьюки 1965 года продолжается через новый "гибкий" аппарат Б"а"ПФ. На основе алгебраической теории чисел определены дискретные преобразования Фурье, с дальнейшими различными конкретизациями. При этом множества задания дискретной функции связываются с различными оптимизационными задачами, включая метод квази Монте-Карло.

ФРсП: 40. Как отмечается в обстоятельной монографии "Геометрия чисел" П. М. Грубера и К. Г. Леккеркеркера, "*значительного вклада в классическую теорию вычисления и оценки критических определителей в последнее время отмечено не было*". В данной статье, в определенном смысле, восполняется возникшая задержка в развитии указанной темы. Предлагается новый теоретико-числовой подход с многочисленными последствиями, фактически позволяющий с других позиций пересмотреть всю эту тематику.

ФРсП: 41. Дано доказательство теоремы вложения классов Соболева — Морри в простран-ство равномерно непрерывных функций, которые являются дополнительными к классическим теоремам Соболева в случаях их невыполнения и анонсировано в [36].

ФРсП: 42. Вопреки сложившемуся в теории экстремальных задач убеждению, по которой оценки снизу намного сложнее оценок сверху, для заданного конечного набора линейных функционалов построены функции, обращающиеся на них в нуль, и получены оценки снизу норм их производных. Приведены их различные применения, в их числе в модельной ситуации $L^2 \mapsto L^2$ и $L^2 \mapsto L^\infty$ получены точные порядки приближенного дифференцирования, что относится к достижению на уровне человечества по оператору дифференцирования, который вместе с оператором интегрирования являют собой выдающиеся изобретения цивилизации.

ФРсП: 43. В статье обсуждается К(В)П-постановка, состоящая из известного и в течении десятилетий разрабатываемого К(В)П-1, с новыми продолжениями К(В)П-2, -3, в совокупности предлагаемая как естественная теоретическая и вычислительная схема дальнейшего развития численного анализа.

ФРсП: 44. Новое направление – "Предпоперечник Колмогорова".

ФРсП: 45-46. Классического звучания результаты по преобразованиям Харди и Беллмана с массированным продолжением.

ФРсП: 47. Классическая теорема С. Л. Соболева переходом от лебеговой к другой норме дополнена критериями во всех случаях её невыполнения.

ФРсП: 48. Классического звучания результаты в двумерном случае с Продолжением в виде нового направления "К(В)П-анализ бесконечно гладких функций".

ФРсП: 52-56. Многомерные окончательные продолжения одномерных обратных М. Сихова и прямых М. Жайнибековой теорем теории приближений в разных метриках.

Значимые результаты как "Узнаваемость Казахстана в международном научном пространстве":

Всего 10 ЗРсП:

ЗРсП: 1. П. Л. Ульяновым (1967) в одномерном случае было установлено, что вложение $H_p^\omega \subset C$ имеет место тогда и только тогда, когда каждая функция из H_p^ω раскладывается в равномерно сходящихся тригонометрический ряд Фурье и была высказано предположение, что существует аналогичная связь и в случае функций многих переменных.

В статье устанавливается справедливость гипотезы Ульянова при суммировании тригонометрических рядов по Принсхейму, но не по сферам.

Продолжение темы. Найти такие классы A и B, ортогональную систему $\{\psi_n\}$ и метод суммирования, что вложение $A \subset B$ эквивалентно сходимости ряда Фурье по этой системе при этом методе суммирования по норме B.

ЗРсП:15. Предложен способ построения квадратурных формул, основанный на теории дивизоров поля гауссовых чисел в круговых полях для функций из классов Соболева с доминирующей смешанной производной и из классов Никольского с доминирующей смешанной разностью.

ЗРсП: 19. Берется результат из знаменитой монографии профессора МГУ Н. М. Коробова "Теоретико – числовые методы в приближенном анализе", опубликованного в 1963 году в серии "Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики" и улучшается "в квадрат раз" (это то же самое, если вместо затрат в $1000000 ту же работу выполнили за $1000) и на языке Компьютерного (вычислительного) поперечника" показано, что дальше улучшить полученное нельзя.

ЗРсП: 20. Американские математики Дитциан и Тотик ввели новый параметр в старое определение в виде модуля непрерывности с переменным приращением.

В известном международном журнале (советско-венгерском, теперь российско-венгерском) "Analysis mathematica" было исследовано влияние этого параметра. Статья оказалось с ошибками в доказательствах, что в международных журналах бывает крайне редко (да ещё и неокончательной в недоказанных формулировках).

Здесь исправлены ошибки, решение задачи доводится до окончательного. Тем самым показываем, что в Астане критически читаем научные статьи и правильное решение публикуем в том же журнале на 35 страницах текста.

Исследовано влияние нового параметра в случае вложения в пространство Лоренца, где выявлен новой эффект в виде независимости от параметра в "близком" случае. В неравенстве Ульянова-Стороженко-Гарсиа показано место параметра при переходе к модулю непрерывности с переменным приращением (с подтверждением точности примерами экстремальных функций).

ЗРсП: 23. Дано К(В)П-1 – решение задачи дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в смешанной метрике $L^{2,\infty}$.

ЗРсП: 28. Получены точные порядки численного интегрирования коэффициентов Фурье и показаны их применения в задачах восстановления.

ЗРсП: 30. Получены критерии равномерной распределенности – метод квази-Монте Карло - сеток Коробова, которые являются примером *сверхсжатия информации* (наш термин) в вычислительной практике.

ЗРсП: 49. Классического характера теоремы снабжены эффективными алгоритмами построения вычислительных агрегатов.

ЗРсП: 50. В заявленной задаче получен окончательный результат.

ЗРсП: 51. В заявленной задаче получен окончательный результат.

Публикации в некоммерческих журналах с импакт-фактором как ЛД, также ФР и ЗР без продолжений как уже зафиксированные авторские достижения - 7:

ЛД: 2. Гипотеза Ульянова из предыдущей статьи под номером 1 была справедлива для классов $H_{p,m}^{\omega(\delta)}$ в случае m переменных при $1 \le p \le m$, где $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности, но малосодержательна. Замена в определении класса модуля непрерывности на модуль гладкости порядка $m+1$ повлекла получение нетривиальной теоремы.

ЛД: 12. В свое время это были Значимые результаты, в настоящее время усилены до окончательных, но определение восстановления в ней остается (пишем без формул) "Вместо термина “интерполяция” здесь применяется термин “восстановление”, поскольку значения агрегата приближения не совпадают, вообще говоря, со значениями приближаемой функции в узлах сетки". Со своей поучительной историей: С. М. Никольский, после моего доклада на его семинаре, просмотрев мою статью, с присущей ему в таких случаях ехидцей, спросил "Вы думаете, все знают что такое *восстановление*", на что В. Н. Темляков по телефону продиктовал мне требуемое.

ФРбезП: 3. Известный критерий Ф. Рисса 1910 года принадлежности производной абсолютно непрерывной функции пространству L^p, входящий во многие учебники, распространен на самый общий случай в шкале классов Орлича.

ФРбезП: 5. По аналогии с критерием Ульянова $H_1^{\omega} \subset L^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty$ для класса функций, определенного скоростью убывания наилучших приближений тригонометрическими многочленами установлен критерий

$$E_1(\lambda) \subset L^2 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty.$$

ЗРбезП: 4. В доказательстве ранее известного обобщения теоремы Хилла-Клейна-Издзуми показана ошибка и дано верное доказательство.

ЗРбезП: 6. Показано, что многомерный аналог теоремы вложения Конюшкова – Стечкина для случая вложения в пространство равномерно непрерывных функций неусиляем.

ЗРбезП: 26. Установлено очень плохое распределение сетки Смоляка, что вместе с [32] закрывает эту тему.

В подробном изложении все утверждения ФР, ЗР и ЛД обоснованы в [60-63] в Серии *Фундаментальные и значимые достижения ИТМиНВ с перспективой их развития (Обзор)* - 1997, 2010, 2012, 2018.

Содержание ФР, ЗР и ЛД опубликованы **в некоммерческих журналов с импакт-фактором по базам Web of Science и Scopus** в статьях [1-56]:

Количественный список журналов с импакт-фактором, где опубликованы статьи Научной школы Н. Темиргалиева (чем больше разных журналов – тем лучше)

1. Foundations Of Computational Mathematics (Found Comput Math) - 1
2. Математический сборник (Матем. сб.) - 2
3. Известия Российской академии наук. Серия математическая (Изв. РАН, сер. матем.) - 1
4. Математические заметки (Мат. заметки) - 14
5. Доклады Академии наук (Докл. АН СССР и Докл. РАН) - 5
6. Известия высших учебных заведений (Изв. ВУЗов. Математика) - 16
7. Analysis Mathematica (Analysis Math.) - 3
8. Сибирский математический журнал (Сиб. матем. журнал) - 2
9. Сибирский журнал вычислительной математики (Сиб. журн. вычисл. матем.) - 2
10. Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова РАН - 2
11. Журнал вычислительной математики и математической физики (ЖВМ и МФ) - 5
12. Acta Scientiarum Mathematicarum - 1
13. Дифференциальные уравнения (Дифф. уравн.) - 2

ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ - 530 стр.
НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ - 465 стр.

***

В математике-информатике самое главное и самое трудное – это постановка задачи. Здесь все задачи подробно освещены в контексте международной науки. Вполне обоснованная задача почти всегда представляет собой неприступную крепость. Но не в Программе *"Математика-информатика от ИТМиНВ – на весъ Казахстан!"*, – там всюду авторские разработки, дающие 70 и выше процентную фору по всему "НАУЧНОМУ ПОТЕНЦИАЛУ ИТМиНВ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ПРОЕКТА №1". Во всяком случае есть с чего начинать, дальше, как во всякой ключевой задаче, все непредсказуемо, – можно "застрять" на каком-то шаге доказательства на дни, недели, месяцы, годы, и, вообще, по всей своей жизни (в чем надо быть осмотрительным не поддастся соблазну такое место вынести в условие теоремы).

Быть может по гуманитарным наукам и возможно достаточно быстро войти в тему, но не в математике-информатике: по собственному опыту работы со студентами можно констатировать, что готовность к глубоким исследованиям с полным пониманием начинается с первого класса школы до базовых университетских дисциплин включительно – программный материал в сознание внедряется "по капле", или как говорят в математике, по "эпсилон".

Начнем с Проекта №2, в котором вся методология усвоения на историческом фоне изложена в "Кіріспе" – "Введение", весь материал, можно сказать на атомарном уровне - в Оглавлении:

"XX ғасырдың басында қазақ зиялылары, негізінен бастауыш мектеп деңгейіндегі қазақты математиканы білуге шағырған еді (қазаққа математиканы игеруді міндеттеген еді), және де құр ұрандатып қоймай, арнайы математикалық білімі болмаса да, іздері іске кірісіп кеткен - Ахмет Байтұрсынов математикалық терминологиясымен, Қаныш Сатбаев мектеп математикасымен, Елдес Омаров "Пішімдеме" атты геометрия оқулығымен, Әлімхан Ермеков қазақ тіліндегі математикадан "Ұлы математика курсы" атты тұңғыш оқулығымен халқына қызмет еткен. Осының жалғасы ретінде (осыған орай), арыстарымыздың (солардың) аруағына сүйеніп, бұл оқулық мектеп математикасын игеру арқылы қалың қазақтың интеллектуалдық сапасы өрлей түсіп (көтеріліп), жас буынның білім-ғылымы ана тілінде ашылып, ары қарай халықаралық деңгейде қазақ атын шығарады деген үмітпен арналады".

Автор

Нұрлан Темірғалиев

"МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ"

(өңделген және толықтырылған екінші басылым)

ҚАЗАҚША ЕКІНШІ БАСЫЛЫМЫНА КІРІСПЕ

(жоба, жақша ішінде кей сөз тіркестерінің баламалары берілген)

1. Ұлт мәселесі. Кеңес кезеңінде өсірілген де, өшірілген де қазақтың жоғары кәсіби деңгейдегі алғашқы математиктері Ибатолла Ақбергенов (1907-1938) пен Сәдуақас Боқаев (1907 жылы дүниеге келген, 1937 жылы ұсталған, 1942 жылы түрмеде қайтыс болған) еді.

Егер кімде-кім қайсыбір халықтың білімін және сапалы білімсіз мүмкін емес ғылымын тоқтатқысы келсе, математикалық анализден айырса болғаны, басқалары өз өзінен-ақ орындалады.

Сол себептен болса керек, қазақтағы алғашқы математикалық анализ мамандары болып табылатын аталған қос арысымыз жойылған (қырғызда әкімшілік әдістермен күнінен бұрын жер жастандырған сондай азамат мақсаты "*Келешекте математик болуын аңсаган жас буынга арнаймын*" бағыштауында ұрандалған көлемі мың бетке жуық екі томдық **"ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЖАНА ИНТЕГРАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР"** атты оқулық авторы Рақым Усубакунов еді, басқа түркі халықтарынан ондай патриот байқалмайды).

Олардың орнын басардай (әрине, барлық күшін салса да, өйткені ел сүйгіштік пен жұғымдылығынан 1826 жылы Нильс Хенрик Абель (1802-1829, норвег ғалымы) айтқандай *"Коши есуас (есі ауысқан) және де онымен жақсы қарым-қатынаста болу мүмкін емес, бірақ қазіргі уақытта математиканы қалай баяндау (айту) керек екенін білетін жалғыз адам сол. Оның істеп жүргені тамаша (керемет), сонымен қатар шым-шытырман"*) басқа қажетті деңгейдегі білім - ғылым да керек) тұлға табылмады.

2. Математикалық анализдің өте қысқа "ат үсті" тарихы. Математикалық анализбен таныстықты әр адам *"Жасың нешеде?"* деген сұраққа жауап бергеннен бастайды. Сонан соң кезек сандарды қосу мен көбейту кестесіне келеді. Геометриядан өзге орта мектеп бағдарламасы "жеңілдетілген" математикалық анализ болып табылады. Осының бәрі жоғары мектепте жалғасады.

Осы айтылғанның бәрінен *"Математикалық анализ деген не?"* сұрағы туындайды. Бұл оқулықты сол түпсіз терең сұраққа алғашқы жауап деп қабылдауға болады.

Бүкіл Кіріспе бойында жай, басқа қосымша сөздер айтылмағанда, "Оқулық" дегеніміз Н. Темірғалиевтің "Математикалық анализ" (1979-1997) оқулығы мен бірге оның осы екінші басылымы болып табылады (жақшасыз оқулық сөзі "жалпы жағдайда" қолданылады).

Бастаулары ғасырлар мен мыңжылдықтар түнегінде жоғалатын математикалық анализ, өз кезегінде әуелі **"Ақырсыз аз шамалар арқылы жүргізілетін анализ"**, сонан соң **"Дифференциалдық және интегралдық есептеулер"** аттарымен әлемге таралған ілім ағылшын ғалымы Исаак Ньютон (1643-1727) және неміс ғалымы Готфрид Лейбництің (1646-1716) адамзат ғылымындағы ең биік жетістіктерге жатады.

1665-67 жылдары студенттік кезеңі өтіп жатқан Кембриджді басып кеткен обадан өзінің ауылы Вулстропты паналап жатқан кезде Ньютон математикалық анализдің өзіндік негізін салған.

Лейбниц болса, 1672-73 жылдары Христиан Гюйгенстің (1629-1695, голланд ғалымы) тікелей, Рене Декарт (1596-1650, француз ғалымы) және Блез Паскальдің (1623-1662, француз ғалымы) еңбектерінің ықпалымен, Ньютонның кинематикалық көзқарасынан өзге болып табылатын математикалық анализдің геометриялық тұрғыдағы өз ілімін дамытады.

Әдетте, ғылымда есептің шешімін сезіну – тек бастапқы кезең болады да, ал соңғы кезең сол "түсінгенін" кең ғылыми ортаға оңай қабылданатын түрде жеткізу болып табылады.

Дәл осындай жәйт математикалық анализ жағдайында да орын алған.

Лейбниц түріндегі анализ алғаш рет 1684 жылы *"Максимум мен минимум үшін, сонымен қатар жанамалар үшін де бөлшек және иррационал шамалар кедергі бола алмайтын жаңа әдіс пен оларды есептеудің ерекше түрлері"* атты алты (қараңыз – не бары алты беттік!) беттік мақалада Acta Eruditorum математикалық журналында жарық көрді. Егер оның бұл мақаласында "*Дифференциалдық есептеулер*" алғаш рет жарияланса, 1686 жылғы басқа мақаласында *"Интегралдық есептеулер"* негізі салынған.

1687 жылы Ньютон *"Жаратылыстану философиясының математикалық бастамалары (Philosophiae naturalis principia mathematica)"* атты негізгі еңбегін басып шығарды. Мұнда болмысы жағынан Лейбництің *"Дифференциалдық есептеулерімен"* бірдей болып келетін, өзі *флюкция* деп атаған әдісін басшылыққа ала отырып, бақылау мен есептеулер арқылы табиғаттың басты құбылыстарының, басым бөлігі аспан денелерінің қозғалыстарының шешімдерін табады.

Осы уақыттан бастап математика ғылымы үшін жаңа кезең басталды. Ньютон мен Лейбництің алып мүмкіндікті десе де болатын математикалық құрылғылары – туынды, интеграл және қатар ертедегі көрнекті математиктерге бой бермеген жаратылыстанудың, геометрияның және математиканың ішкі мәселелеріне қатысты аты шулы есептерді шешу үшін қолданылады, және де көбінесе табыспен.

Бұл жерде зерттеудің екі бағытын бөліп қарастыру керек.

Біріншіден, жаңа тілде (түрде), заманауи (қазіргі) терминдермен айтқанда, табиғи құбылыстардың математикалық модельдері құрылып, сол жаңа зерттеу құралдарымен шешілді. Дәл (өзіндік) математикалық есептер де осындай жетістікті жағдайда болады.

Екіншіден, жаңа математикалық құралдардың өздері зерттеледі, әрқайсысына енген шекке көшкенде қандай да бір қасиеттерді жоғалту қаупі сақталып отырғандықтан, қайталайық, туынды, интеграл және қатар қолдану заңдылығын анықтау қажет.

Бірінші бағыт бойынша, барлық көрнекті зерттеушілердің ішінен Леонард Эйлердің (1707-1783, неміс ғалымы) кескіні, екіншісі бойынша Огюстен Луи Коши (1789-1857, француз ғалымы) ерекшеленеді.

Математикалық анализдегі сол уақыттағы жағдайды Х. Абель былай суреттеген: *"Қазіргі Анализді басып кеткен сұмдық қараңғылықта (невразумительность) анықтық орналастыруға мен бар күшімді саламын. Онда қандай да болсын (ешқандай да) жоспар не жүйе (байқалмайды) түбірімен жоқ, сондықтан көптеген адам сонымен айналысатыны таңғалатындай. Және де ең жаманы – сонда толығымен бірмағыналы, қайшылықсыз және оқылуынан әбден түсінікті анықтамалар мен қолданылған әр амалдың заңдылығы қамтамасыз етілген дәлелдемелер болмауы".*

Математикалық анализ Кошидің 1821 жылғы "Анализ курсы" атты еңбегінде негізделген. Соның өзінде математикалық анализдің тереңдігі мен күрделілігі сондай, бәрін біледі деп қабылданған Кошидің өзі, Абельдің сөзімен айтқанда: *"Коши мырзаның еңбегінде келесі теорема бар: "Егерде* $u_0+u_1+u_2+\ldots$ *қатарының функциялары үзіліссіз болса, онда оның қосындысы да үзіліссіз болады". Бірақ, менің түсінуімше, бұл теоремадан тыс жәйттарда бар сияқты. Мәселен,*

$$\sin x \ -\frac{1}{2}\sin 2x \ +\frac{1}{3}\sin 3x \ +\dots$$

қатары x шамасының әр $(2m+1)\cdot\pi$ манінде үзілісті".

Математикалық анализді негіздеу жарысы ұлт дәрежесін бағалау биігіне жеткен еді, - сондағы айтылғанға көңіл бөлейік.

Иоган Бернулли (1667-1748, неміс ғалымы) 1735 жылы: *"Агылшын еместерге қандай менсінбеушілік! Бұл әдістерді агылшындардың көмегісіз өзіміз таптық".*

Карл Вейерштрасс (1815-1897, неміс ғалымы) 1874 жылы: *"Біз, немістер, Якобиге еріп, дербес туындыларды белгілеу үшін оның орнына дөңгелек ∂ пайдаланамыз".*

20. IV. 1714 жылы Исаак Ньютон*: "Лейбниц мырза $\int$ символын ауданын белгілеу керек қисықтың ординатасының алдында орналастырса, мен осыдан бірнеше жыл бұрын ординатаны квадрат ішіне енгізген едім... . Сонымен, ... менің символдарым бұнда ең бірінші болып табылады",* – деген екен.

Сол уақытта зерттеулер тек математикалық анализ ағымында жүргізілді деген жалған түсініктен аулақ болу үшін, басқаша айтқанда, *"Үзіліссіз математика"* аясында ғана емес, *"Дискретті математикада"* да өткізілгенінің куәсі келесі (бұған кейін төменде ораламыз) Пьер Ферманың (1601-1665, француз ғалымы) сандық эксперименттер арқылы әр $p=4k+1$ $(k=1,2,...)$ түріндегі жай сан екі бүтін санның квадраттарының қосындысы (мәселен, $17=4\cdot4+1=4^2+1^2$) болады деген болжамын 1707 жылы Л. Эйлер дәлелдеген еді.

Сонымен, Ньютон-Лейбниц заманынан кейін артығымен екі ғасыр бойы адамзаттың ең биік ақыл-ой иелері математикалық анализдің логикалық негіздемесін қаласа, соңғы нүктені 1897 жылы өмірден өткен Карл Вейерштрасс қойды.

3. "Оқулықтың" математикалық анализ ағымымен байланысы және өзіндік орны. Әр тарихи кезеңде әрбір ғылыми дамыған ел өзінің математикалық анализ оқулықтарын өз не (және) заманының халықаралық (бұрында латын, француз, неміс соңғы кезде басым түрде ағылшын) тілдерінде шығарып, басқа тілдерге аударылуы сол елдің танылуы болады. Математикалық анализден сондай танымал оқулықтардың тізімін мыналар бастайды:

metricconverterProductID1. Г1. Г. Ф. Лопиталь. Analyse des infiniment petits (Ақырсыз аз шамалар анализі, 1696).

Кіріспесінен: "*Бұл есептеу ілімінің қолданыс өрісі кең орасан ... бұл еңбекте соның дүниенің сансыз көп таңғажайып қасиеттерін ашуға әкелетінін көреміз... ".*

metricconverterProductID2. Л2. Л. Эйлер. Introductio in analysin infinitorum (Ақырсыз аз шамалар анализіне кіріспе), 1748,

Institutiones calculi differentialis (Дифференциалдық есептеу), 1755,

Institutiones calculi integralis Интегралдық есептеу),1768-1770.

3. О. Л. Коши. Analyse Algebrique (Анализ курсы), 1821.

Математикалық анализді әр дирижер өзінше түсініп орындайтын симфония деп елестетуге болады. Бұл "Оқулықты" да соның бір орындалуы деп түсіну керек.

Жүздеген, тіпті мыңдаған оқулық бар, солардың көбінде Математикалық анализдің өзіндік оқылуы бар, кейде күтпеген өте ұтымды әдістемемен, кейде әдемілігімен таң қалдырарлық.

Бірақ та бұның бәрін бір оқулықта жинақтау мүмкін емес, өйткені оқулық әлемінде *"Қиындық сақталу принципі"* деп атауға болатын қағида бар, – сол себептен бір тақырыптағы *"әдемілік"* пен *"ұтымдылық"* басқа тақырыпта әртүрлі мағынадағы *"ұтылысқа"* әкелуі мүмкін.

Осы "Оқулыққа" көптеген, бұған дейін бар оқулықтарда кездеспейтін өзіндік методикалық шешімдер енген, бірақ басқа оқулықтардағы әдістемелер біздің негізгі методикалық жолға үлесті болса, осыған сол түрде енгізілген.

Және де автордың әртүрлі ғылыми тақырыптардағы халықаралық математика және информатиканың алдыңғы шептеріндегі нәтижелері соларды тек түсінудің өзінің, әрі қарай дамытуды айтпағанда, қиыншылығын көрсетіп, жиі айтылатын "Мынадайды түсінбесе математикада не істеп жүр" дегеннен аулақ қылып, барлық мүмкін тереңдікте түсіндіруді мәжбүр етті.

4. Оқулық дайындаудың жалпы қагидалары. Біріншісі қиындық,– ол оқулықтың өзіндік жалпы жоспары мен әдістемесін анықтау: Р. Браунинг айтқандай *"Сәл көбейтсе – соншама көп қосылады, сәл азайтса – қандай әлемдер жогалады!".*

Екінші қиындық, – ол Клод Гельвецийше *"Шыгармада бәрі теңіз толқындарындай байланыста болуы тиіс. Бір ойдан екіншісіне өту әр толқынның келесісін дайындайтындай тәрізді болуы керек"* ойлар бірінен біріне жұғысты өтетін жалпы ағым құруы қажет.

Липман Берс *"Математика оқулығын асықпай және карандашын қолынан тастамай оқу керектігі туралы оқырманды ескерту керек. Барлық есептеулерді тексеріп, кітапта арнайы қалдырылып кетілген жерлерінің бәрін өзі толықтыруы қажет.*

Бұл аз емес күш жұмсауды талап етеді, бірақ математиканы игерудің бұдан ұтымды жолын мен білмеймін" дейді.

Бірақ та, біздің ұстаным бойынша, адамзат тарихында жүздеген, бірнеше мың жылдар бойы талай азап-қиыншылықтардан өтіп табылғанды *"Мен бастап бердім, әрі қарай өзің түсініп ал"* деген түрде оқырманды жүктеуге болмайды. "Оқулықты" игерген соң жаңалық ашу жолында барынша ізденуге мүмкіндік алады.

Бұны ашып айтқанда

5. Оқулық түсінікті болып және пән әдемілігін көрсетуі керек. Көптеген белгілі оқулықтарда, айтылса да, айтылмаса да, "*оқу үстіндегі ойлау әрекетінің өзі гана сапалы түсіну мен игеруді қамтамасыз етеді*" деген қағида ұстанады. Бізде басқаша: "Оқулықтың" әр сөйлемі толық көлемде, барлық тереңдікте және дәлелді түрде түсінікті болуы мүмкіншілігінше қамтамасыз етілген. Мәселен, жақсы деп есептелетін мектеп оқулығында " *a нақты санының абсолютті шамасы кез келген оң ε санынан кіші болса, онда a нөлге тең*" деген тұжырым айтылуынан-ақ түсінікті деп әрі қарай жүре береді. Расында да, сәл ойланып, солай болады деген ұйғарымға келуге болады. Әрдайым осындай түрде "түсіне" беріп, сондай шикі "түсіну" жиналып, түбінде нақтылы қойылған сұраққа дәл жауап бере алмай, тіпті оны түсінбей, білгенде емес, білмегенде емес, бір қиыншылық заманда айтылғандай *"Өлтірмеді де, тойдырмады да, қайнатты гой сорды"* болып шығады.

Бұнда не жөнінде сөз болып тұрғанын және "солай болады-ау" деген болжамдармен "шегелеп тастайтын" дәлелдеме айырмашылығы " $\forall\varepsilon > 0: \ |a| < \varepsilon \Rightarrow 0 = 0$ " леммасының 1 (§3, II-тарау) – пункттегі сандар аксиомаларының біріне негізделген дәлелдемесінен және сондағы түсіндірмелерден ұғуға болады.

Липман Берс оқулық әдемілігі жөнінде: *"Математикалық анализ пайдалылығы мен қолдану өрісінің байлығымен гана емес, әдемілігімен ерекше. Әрине, математикалық жетістіктерді эстетикалық тұргыдан багалау мүмкіндігі ұзақ еңбек арқылы жетілетін математикалық мәдениетті талап етеді. Сонда да, оқулық нәтижелі не нәтижесіз болуы, жинақтап айтқанда, ең алдымен оның оқырманына сол пәннің әдемілігін жеткізу дәрежесімен өлшенеді".*

Мектептен жақсы дайындықпен келген студенттерге өте ежектеп түсіндірген ұнамауы да мүмкін, сондай жағдайда лекторға *"Бізді ақымаққа (идиотқа) теңейсіз бе?"* деп жасырын түрде жазатындар да болған. Әрине, бұндайды *"математикалық жетілгендер"* деп түсінуге болады да, "Оқулық" мақсатының бірі сондай көптеген жағдайдың куәсі болу.

6. Оқулық оқуға өрнектеу жагынан да ыңғайлы болуы тиіс. 1950 жылы жарық көрген есептеу математикасына арналған өз ғылыми монографиясында Л. В. Канторович (1912-1986, совет ғалымы) 1938 жылы ату жазасына кесіліп, көптен кейін ақталған шәкірті И.Ақбергеновтің диссертациясы мен тұңғыш қазақ ғалымының "*И. А. Акбергенов. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма и об определении его собственных значений.* Математический сборник, 42:6 (1935), 679–697" толық көлемді ғылыми мақаласына сілтемелер беруден тайынбаған.

Осы қазақ математикасына қатысты ғылыми және азаматтық ерлікті еске ала отырып, сол кітаптан өзімізге бір пайдалы техникалық қорытынды жасайық.

Әдетте кітаптарда бір тұжырым басқа беттерде қайталанбайды, бірақ, И. Ақбергеновке сілтеме берген монографияда оқырманның ыңғайын көздеп, қажетті жерлерде тұжырымдардың оқылуы қайтадан берілген.

Дәл сол тәртіп (әдіс) осы "Оқулықта" да сақталады.

7. "Оқулық" бойы сөз бен сөз тіркестері жөнінде сақталатын ұстаным. Байқауымызша, тіпті бастауыш мектептен бастап, негізгі ұғымдарды бейнелейтін сөздер айтылуынан-ақ өз-өзінен түсінікті деп қолданылады. Ондай сөздерге *шама, формула* тәрізді көптеген сөздер жатады. Қандай да болмасын оқулықты игеруді қиындататын себептер осы болса керек.

Бұл оқулықта "*Математикалық анализге*" бастама болып табылатын Бірінші *"Математиканың логикалың құрылысы мен толқыланган терминдер сөздігі. Сандардың геометриялық-алгебралық және салдарымен бірге аксиомалық құрылымы негізіндегі математикалық дәлелдеу мәдениеті"* атты тарауда осы ескеріліп, математикадағы мағыналы сөздер мен сөз тіркестер кеңінен түсіндіріледі, және де бұл ұстаным бүкіл оқулық бойында әр тақырып деңгейінде сақталады.

8. Ғылымы "бәсең" оқу орнында математикалық анализ оқулығы барынша терең, әр тақырып кеңінен ашылған және түсінікті болуы тиіс, және де сол сапада пәнді түсініп, студенттің әр сұрағына толық жауап бере алатындай оқытушы болуы жөн.

Қолданыстағы математикалық анализ оқулықтары әдетте жоғары дәрежелі оқу орнындағы ірі ғалымдармен жазылады да айналасындағы орта көмегі, сезіп пе, сезінбей ме, әйтеуір ескеріледі.

Математикалық анализ математикалық ғылым-білім негізі болғандықтан, әрқашанда қолданыста болып, ғылыми биік ортада ылғи талқылануда болады.

Оның үстіне көз алдында биік талапты өте қиын емтихандар арқылы іріктеліп алынған аты шулы университеттердің студенттері отырғанда өз оқулығында ежіктеп баяндауды керек етпей, қажетті сөз тауып қысқа айтылуды мақтан етеді.

Бірақ та, кең көлемді ғылыми зерттеулері жоқ жағдайларда ондай жоғары сапалы оқулықтарға сүйену күтілген нәтижеге әкелмеуі мүмкін. Дәл осы жәйт бұл "Оқулықта" қолданысқа алынған да, ғылым-біліммен айналысқан кезде өз-өзінен туындайтын көптеген сұрақ-мәселе, әрине, мүмкіндігімізге қарай, сонда алдын ала жауаптарын тапқан. Оның үстіне, тіпті сондай сұрақ-мәселе қойылатыны ойына да келмейтін жағдайлар да осы "Оқулықта" қамтылды.

9. Математикалық анализді оқулықтар әлемінде игеру жолы.

Жоғарыда айтылғаннан шығатын қорытынды: математикалық анализді игергенде бір оқулықты таңдап алып, басынан аяғына дейін түсіне оқып шығу керек те, сонан соң *"мына тақырып мында былай, ана тақырып анда солай ашылған"* екен деп басқа оқулықтарды шолып өту жөн.

10. Көп бетті "Оқулықтан" сескенбеу керек. Енді осы "Оқулықты" игергенде мүмкін пайдалы болатын мәліметтермен бөлісейік.

"*Бір жол бар, алыс болса да жақын, бір жол бар, жақын болса да алыс*" дегендей, бұл "Оқулықтағы" көп бетті оқудан сескенбеу керек. Себебі, қысқа жазып, "*әрі қарай өзің түсіне жатарсың*" дегеннен гөрі қажеттіні барынша қыр-сырын ашып жазғаннан игерген тез болады. Тіпті оқырманның өзіне маңыздылығын көрсетіп, енді *"өзің түсініп ал"* деп сілтегенде сөз болып тұрған ой, тұжырымның сыр-құпиялары тасада қалуы мүмкін. Және де "түсіндім" деп жүргені жалған екенін қайдан біледі?

Оның үстіне, жоғарыда айтылғандай, адамзаттың ең биік ғалымдары ғасырлар бойы – Ньютон мен Лейбництен (әрі қарай үңілсек – Архимедке не одан да бұрынғыларға тірелер едік) бастап, 1897 жылы дүние салған Вейерштрасспен аяқталатын жеңіс пен жеңіліске толы драмалық ізденісте болып тапқанына әр оқырман өздігінен жете алмауы да мүмкін.

Тіпті сөзбен дұрыс айтылған ұғым толық тереңдікте түсініп, еркін пайдалануды қамтамасыз етпеуі мүмкін. Солай, Коши 1821 жылы өзінің әйгілі "*Анализ курсы*" оқулығында бір қарағанда түсінікті сияқты *"Егер $f(x+\alpha)-f(x)$ айырымының сандық мәндері α мен бірге ақырсыз азайса, онда $f(x)$-ті үзіліссіз функция деп атаймыз"* деген болса, ондағы дәл мағынасы ашылмаған "*кішкене құбылыстарды*" 1874 жылы ғана Карл Вейерштрасстың $\varepsilon-\delta$-тіліндегі үзіліссіздік анықтамасында қажетті және жеткілікті дәлдікте берілді.

Оқырман ой-жүйесіне математика ұялайды, бір кезде бәрі анық және түсінікті болып көрінуі мүмкін. Бірақ та кездескен білім-ғылым ойларын математикалық анализ елегінен өткізуді әдетке айналдыру керек.

Математикалық анализді "*ат үсті*" игеру мүмкін емес. *"Мен патшамын, қолым тие бермейді, геометрияңды қысқа түрде игеру әдісін айтып берші"* деген Птолемейге Евклид *"Ғылымда патшаға арналған жеке жол жоқ"*, - деп жауап берген. Сол сияқты, оқырман оқулықтың әр жолын бар назарын салып, игеруі тиіс.

Математикалық анализді ой-санасына сіңіріп алғанда (одан кейін онымен бірге математикалық білімнің негізін құрайтын алгебра мен геометрия әлдеқайда жеңіл игеріледі), әрі қарай білім-ғылымды дамытуға, сонымен бірге өзінің де дамуына жол ашылады.

Осы орайда Филдс премиясының лауреаты Чарльз Феферманның бірнеше беттік мақаласын одан асып түспесе кем емес атақты математик Евгений Никишин, өзі айтқандай, бір апта бойы оқығаны еске түседі.

Сонымен, өте қысқа жазылған не бары техникалық, тіпті жаңа көзқараста болсын, мақаланы "терезелері тең" математиктер сондай уақыт түсінсе, адамзат ой өрісінің идеялық тереңінде жатқанды қысқа айтылғаннан барлық мүмкін көлемде қалың жұрт көтере алатыны өте күмәнді. Сол себепті, егжей-тегжей жазылғанды оңайға жақын игеріп, соның арқасында жүйелі түрде математикалық құралдармен қаруланып, неше түрлі ғылыми құпияларға шабуыл жасаған, Джордж Байрон айтқандай, өзінің де, тегінің де атағын шығарған ер ісі емес пе.

11. "Математикалық жетілгендік"-ті қамтамасыз ету бұл "Оқулықтың" Бірінші "Математиканың логикалық құрылысы мен талқыланған терминдер сөздігі. Сандардың геометриялық-алгебралық және салдарымен бірге аксиомалық құрылымы негізіндегі математикалық дәлелдеу мәдениеті" атты тарауынан басталады. Мазмұны аталуында көрсетілген тарау оқырман оны толық көлемде игереді деген мақсатпен жазылған. Онда математиканың кәсіби сөздігі мен символдық белгілеу, теорема, жиын, анықтама, функция, сан сынды қолданыс құралдары түсіндіріледі, талқыланады және дәлелдеу мәдениеті тәрбиеленеді.

Арнайы айта кететін жәйт – ол нақты сандардың аксиомалары негізінде әрқашанда қолданыста болатын сандар қасиеттерін дәлелдеу болып табылады. Осында үйреншікті $0 < 1$ теңсіздігі де, *"нөлге бөлуге болмайды"* деген жаттанды ереже де, сол *"математикалық мәдениет"*-ті тәрбиелеудің бір тармағы болып табылады. Сондай-ақ, әдетте еш ойланбай (сәл ойланғанда бұл күрделі мәселе екенін түсінуге болады) қолдана беретін екі жай бөлшектің алымдары мен бөлімдері өз өзімен көбейтіліп, көбейтінді бөлшектің сәйкес алымы мен бөлімі болатыны дәлелденіп, және де геометриялық тұрудан қарағанда неге солай болатыны талқыланады.

Жалпылап айтқанда - математикада бәрі де дәлелдеуді қажет ететіндігі көрсетіледі, көбіне жаттанды түрдегі қолданыстағы, іс жүзінде геометриялық есептерге математикалық анализдің жоғары дамыған техникасын қолдануын мүмкін ететін "*координаттық түзу*" тақырыбын ұзындықты өлшеу мәселесімен байланыстырып, соны шешу үстінде рационал және иррационал (рационал емес) сандарды геометриялық мағынасымен бірге анықтап, сол жолдағы ежелгі математиктерді таң қалдырған "өлшемдес емес" кесінділер арқылы жасалатын қорытындылар (бұл жөнінде соны тым ерте білгені гректерге есептеу амалдарын дамытуға кедергі болды деген де пікір бар), - түсініп оқылуы терең мағыналы қазақ күйлерінде, қызықты романды да тамашалаудан кем түспейді.

Ұзындықты өлшеу бірте-бірте оң бүтін, оң рационал және оң иррацинал сандарға әкеледі. Математика қолданысы көбіне теңдеулер арқылы жүргізіледі. Сондағы бірінші дәрежелі алгебралық теңдеудің өзі бар оң мәнді сандарға теріс мәнді нақты сандарды қосуды мәжбүр етеді.

Сан дәрежесі мен логарифмінің, математиканы былай қойғанда, бүкіл табиғаттануда әрдайым қолданыста болатын қасиеттерінің дәлелдемелері негізінде анықтама тілінде соларды қалай жүргізу керек екендігі баяндалады (үйретіледі).

Жалпы математикада, соның ішінде сан дәрежесінің анықтамасында да, арифметикалық түбір мен логарифм бар болуы туралы теоремаларда, дәлелдеменің өзі, не қайсыбір бөлігі қаншама түсінікті болса да, қаншама өзінен-өзі анық болып көрінсе де, олар толық дәлелдеуден өту керек және де соны орындағанда тек аксиомалар мен дәлелденген тұжырымдарды қолдануға рұқсат етіледі. Бұның бәрінің ең ұтымды жері – дәлелденетін қасиеттер де, қолданылатын құралдар да әрдайым қолданыста болғандықтан бұрыннан белгілі және сол себептен түсінікті.

Бұл жеткілікті көлемде Бірінші тарауда орындалған.

Осының бәрі, қайталайық, мақсатымыз болатын "*математикалық жетілгендік*" ісінің бірінші сатысы десе де болады. Сонан кейін, осы "Оқулықтан" бастап, әрі қарай шексіз деңгейде математикадағы белгіліні игеруді де, жаңа білім-жетістіктерге жетуде табу да көп жеңіл түрде қамтамасыз етіледі.

12. ***Дәлелдемелерге талап.*** Бұл "Оқулық" мынадай тұрғыдан орындалған: "Математикалық анализ" оқулығының басқа ғылыми кітаптардан – оқулық болсын, монография болсын, өзгешілігі ғылыми жетістікті көрсетуде емес, басқада. "Оқулық" мақсаты әуелі математиканың негізгі ұғымдарын енгізіп, оларды бар мүмкін тереңдікпен талқылап (мәселен, шек анықтамасының оншақты сыр-қыры ашылады), өзге ұғымдармен ара қатынастарын анықтау болып табылады. Сонан соң, игерілген анықтамалар тілінде ілім құрайтын мәселелер қойылады да, солардың шешімдері дәлелдеме арқылы беріледі. Бұнда қабылданған анықтамалар мен қандай әдістемелер қалай көлданатынын әбден түсініп алып, бірте-бірте "*Дәлелдеме деген не?*", "*Дәлелдеме қалай жүргізіледі*?" және де т. с. с. сұрақтарды біліп (қойылған сұрақты түсінудің өзі көп білім мен дайындықты қажет етеді), олардың жауаптарын оқырман ой-жүйесіне қабылдап алу керек. Дәл осы жәйтті **"математикалық жетілгендік"** деп түсінуге болады.

Сондықтан, дәлелдеулер толық, ұқсас жағдайларда ұғу өрісін кеңейту мақсатымен басқа әдістер, баскә сөздер арқылы да беріледі.

Анықтамалардың, мүмкіншілігіне қарай, қабылдану себептері кеңінен көрсетіледі.

"Теорема – қойылған мәселенің шешімі" деген қағида ұсталынады. Демек, әр жағдайда, арнайы айтылса да, айтылмаса да, теорема қандай сұраққа және қалай жауап беріп отырғанын әрдайым түсініп алып, осы жәйтті естен шығармау керек.

Математикалық анализдің жаралу және жетілу тарихына үңілсек, ондағы әр ой мен түсінік өте күрделі жетістік болып табылады да, сол себептен толық дәлелдеме мен түсіндіру орнына пайдаланылатын *"оңай"*, *"айқын"*, *"өзінен өзі көрініп тұр"*, *"түсінікті"* деген сөз бен сөз тіркестері бұл "Оқулықта" сақтануды талап ететін "езбелеу" қауіпі болатын бірнеше ерекше жағдай болмаса, қолданылмайды.

Біздің ұстанымымыз – білім саласында оңай не қиын деген сөздер мағынасыз деп білеміз: білсең-*"оңай"*, білмесең-*"қиын"*.

13. Оқырман методология жағынан шыңдалған, қатесіз анықтамалар мен дәлелдемелерге ғана сенуі тиіс – "Бәріне күмәнді болу керек!". Кейде бір оқулықтан екіншісіне көшіп, толық түсінік бермейтін "бір (не бірнеше) қайнауы ішіндегі" методикалық шешімдер оқырманды "білмейтінін білмейді" жағдайына түсіріп, оқу өрісінде сақтала береді.

Мәселен, $f(x) = x^2$ функциясының $x = 5$ нүктесіндегі дифференциалы $l(x) = 10x$ сызықты функциясы болатынын *"дифференциал деп функцияның өсімшесінің сызықты бөлігі аталады"* дегеннен шығарып алу "екі талай". Сондай-ақ, *"анықталмаған функция"* деген аталуының өзі жаңылыстыратын жәйтке дұрыс емес $F(x, f(x)) \equiv 0$ анықтамасы қосылғанда түсіну мүмкін бе?

Ой салатын бір-ақ сөйлем *"Ақырсыз қосынды деген ұғым жоқ"* және де сонан туындайтын 1821 жылғы Кошидің "*қатар деген шек*" қағидасы бүкіл қатарлар теориясын түсінікті етіп, жарқыратып жібермей ме?

Математикалық анализдегі *"Сильвестер критерийінің"* дұрыс оқылуын осы "Оқулықта" кездестіресіңдер.

Осындай көптеген жәйттер бұл "Оқулықта" кеңінен орын алған.

Бұған автордың математика-информатикада әртүрлі мәселелермен айналысқаны және солардың кейбіреулерін шешкені де себеп болса керек, - методика мен методология ғылыми ізденіс кезінде шыңдалады.

14. "Оқулықта" жаттығу есептер берілмейді, өйткені "үзіліссіз математика" ғылымының дәлелдемелері математикалық анализге жататын есептерінің дәл өзі. Бұл "Оқулық" көлемі өте үлкен, өйткені әр тақырып өзіне тән болып, және де бір қарағанда байқала бермейтін, сондықтан тереңде жатқан қасиеттерін, тіпті құпиясын десе де болады, көрсету мақсатында баяндалған. Олардың әрқайсысы адамзаттың ғасырлар бойы дамуының жетістіктеріне жатады. Егер де оқырман жеткілікті тереңдікте тақырыпты игерген болса, онда ежіктеп түсіндірілген беттерге *"көз қиығын салып"* қана, әрі қарай оңай жүре береді.

Және де, жалпы білім-ғылым жағдайында сияқты, математикада да, іштей біліп тұрғаныңды қандай сөздермен өзгеге жинақы, дәл және түсінікті етіп жеткізу керек мәселесі де бар. Ол әдетте қалыптасқан сөз тіркестері мен сөйлемдер арқылы орындалады. Осыған орай, бұл "Оқулықта" математиканың негізі баяндалып талқыланғандықтан, солардың кезіндегі әдеби көркемдеуіне де аса көңіл бөлінген, оған қоса кейде бір нәрсе екі-үш өзара бөлек түрде түсіндіріледі.

Тағы бір айтатын жәйт, – "Оқулықта" әр түрлі ерекшеліктерді көрсететін, сол себепті шығарылған, көптеген мысал – есептер келтірілген бар болса да, оқырманның өзіне шығаруға есептер ұсынылмайды. Өйткені, математикалық анализді игергеннен кейін бүкіл математиканы құрайтын ғылым (әрине, оның өзін де қоса) – математикалық анализ жалғасы, демек, есептері.

"Оқулық" құрылысы әр параграфтың басын ғана оқып, әрі қарай, түсіну жолын жоғалтпай, басқа параграфтарға көшіп, ығыса беруді қамтамасыз етеді. Ал параграф ішіне тереңдей беріп, қосымша мәліметтер алуға болады.

Қорытындылап айтқанда, әбден санаға сіңгеннен кейін, жазылғанды "*Көзбен жүгіріп өтуге болады*". Тоқетерін айтқанда "*Үйрен, үйрен де жирен*".

15. "Оқулықтағы" "методологиялық шешім табу" мен "есеп шығару" орны. Математикалық анализде ой-санаға сіңіруді қажет ететін ұғымдар бар, соның негізгілері болып табылатын тереңде жатқан – сан, функция, шек, туынды, интеграл, қатар. "Оқулықта" солардың бет жағын өзінше әшекейлеу арқылы ойланбай-ақ тек жаттығу түрінде баяндалатын методологиялық шешімдерге ерекше көңіл бөлген.

Айтқанымызды негізгі ұғым – шек мысалында жандандырайық. Наполеон айтқан екен: *"Бір мамлюк тіке қақтығыста менің бес гренадерімді жайратады, бірақ ұйымдастыру күшімен бір полкім барлық мамлюктің күлін көкке ұшырады (жеңіп шығады)"*.

Сол сияқты, тақырыпты ашудағы методика жағынан "ұтымды ұйымдастыру" арқасында (осында және көптеген басқа жағдайларда да) "Оқулықта" сандық функция шегінің 36 жағдайындаҰ $\varepsilon - \delta$-тіліндегі анықтамаларын жазып шығу мәселесі аналитикалық өрнектелуі мен оның геометриялық бейнесі көрнекі түрде екі кестеде бейнеленіп, соларды шектің түріне сәйкес әр кестеден бір-бір жолдан көшіру ережесіне айналған.

Бірақ, шек анықтамасын еш ойланбай, жаттанды түрде ғана дұрыс жаза алудан кейін, көптеген (үзіліссіздік, туынды, интеграл, қатар сынды) мазмұнды қолданыстар негізінде оның өте терең болмысын бірте-бірте сол негізгі ұғымдармен бірге санаға сіңіру кезегі келеді.

Сонымен, осында да, жалпы жағдайда да математика білім-ғылымында тіпті дұрыс болса да айтып беру мен өз аузынан шыққанын жетік түсіну әрқашанда беттесе бермейді.

Дәл осы қағида бүкіл оқулық бойы сақталады: әріптермен белгіленген "*анықталмағандықты ашу*" әдістемелері, дифференциалданатын элементар функциялардың туындыларын есептеу, алғашқы функциялары элементар функция болатын функцияларды "*тану және интегралдау*", басқа да көптеген "*есеп шығару мен жаттығу*" мағвалы тапсырмалар алгоритмдік, яғни бірінен кейін бірі орындалатын қарапайым амалдар түрде берілген. Және де, бұл есептердің сәйкес шек, туынды және интеграл ұғымдарын білмей-ақ, солар атты өте терең теорияны игермей-ақ, дұрыс жауаптарын жазып беруге болады.

Бұнымен, бір жағынан, пәнді, соның ішінде математикалық анализді де, саналы игеру мен, екінші жағынан, сондағы ежелгі заманнан бері оқулықтар мен есептер жинақтарының бірінен-біріне көшіріліп, "*тозығы жеткен*" деп атауға болатын жаттығуларды аса ойланбай шығару – салыстыруға келмейтін дүниелер деп айтқымыз келеді.

16. Орта мектеп өрісіндегі математикалық анализ. Математикалық анализдің білімдегі (және де ғылымдағы) ерекше орны ең алдымен ғасырлар бойы іріктеп қалыптасқан мектеп математикасы негізінен математикалық анализдің жеңілдетілген түрі екендігінде.

Осыған ыңғайлап айта кетейік, мектеп геометриясының маңыздылығы баланың ойлау жүйесін дамытуда десе де болады. Геометрияда әуелі ұстанымдар тізімі (оларды *"аксиомалар жүйесі"* деп атайды да, қаншама сондай жүйе болса, соншама *әртүрлі "геометрия"* болады) тағайындалады, сонан соң осы мәліметтерді және солардың негізінде дәлелденген тұжырымдарды ғана қолданылып, теория құрылады. Бұндағы ең маңыздысы – ол дәлелдеулер кезінде қабылданған ұстанымдар мен солардың салдарын ғана қолдануға болатындығында. Дәл осы жәйт логиканы дамытады деп есептеледі.

Геометриядағы аксиомалар көзге көрінетін нүкте, кесінді, түзу, жазықтық және кеңістік туралы болуы сондағы логикалық ізденістерді көрнекі түрде жандандыра түседі. Және де бұл геометриямен ғана шектелмейді, – механика, ықтималдықтар теориясы, физика бөлімдері де осылай қабылданған аксиомалар негізінде зерттеледі.

Оған қоса, мектеп математикасының негізгі жүгі *"есеп шығару"* емес, әр адамға қажетті *"математикалық есеюге (достижение математической зрелости)"* бар мүмкіндікті қамтамасыз ету. Және де сол *"математикалық есею (жетілу)"* болашақ мамандығына қатыссыз – гуманитарлық па, не математика тәрізді *"дәл мағыналы"* ғылымдар ма, не олардың арасындағылар ма, - бәрі бір!

17. Негізгі ұстам: орта мектеп "есеп шығарумен" шектелмей "математикалық есеюге" әкелу керек. Маңыздылығына сай қайталайық – мектеп математикасы тек қана *"есеп шығарумен"* шектеледі деген өте қате. Соның салдары болса керек мектеп математикасын "*Мектепте математиканы жақсы көретінмін, кез келген есепті тез шығаратын едім*" деңгейінде түсіну кең тарап кеткен. Тіпті студенттерге анықтама, есеп қойылуының және оған жауап беретін теореманың оқылуын, оның төңірегіндегі қосымша сұрақтарға, әрине, дәлелдеудің әр сөзі мен ойын қандай тереңдікте игеру талап етілсе, сондай деңгейде жауап бере алуыңыз керек деп қаншама айтылса да, "*Бұны мен білмеймін, маған есеп беріңізші*" дейді.

Әрине, бұл есеп шығармау деген емес. Дұрыс қойылған методология жағдайында әдеттегі мектеп есептері математика да қиын деп саналмайтын алгоритмдік, яғни бірінен кейін бірі орындалатын қарапайым амалдар, түрде жазылады да, солай оқытылады.

Бар мәселе оқушы санасына *"Математикалық әлемге"* енгізетін Бірінші тараудың мазмұнын оның жас ерекшеліктеріне сай лайықтап жеткізуде.

18. "Оқулықтық" мектеп мұғалімін дайындау мүмкіндігі. Бұнда мектеп бағдарламасының негізгі бөлігі де қамтылған.

Бірінші тараудың мазмұнын әдетте "Математикалық анализге кіріспе" деп атайды. Бұл жағдайда "Кіріспе" деген сөз, көмекші мәлімет деп көрінуі мүмкін болғандықтан, кесіп айтайық – "Бірінші тарауды" толық көлемде әбден түсінбей, "Математикалық анализді" игеру мүмкін емес.

Ал "Математикалық анализдің" өзін әрі қарай жалғастырғанда бүкіл интеллектуалды дүниенің кілті, сонымен бірге, ешкім тартып ала алмайтын әрқашанда қолданысқа дайын өмірлік *"суық қару"* деп те түсінуге болады.

Сонымен, Бірінші тарауда мектеп оқытушысы негізгі элементар функциялардың бес түрінің үшеуін: – *дәрежелік* x^{α} , *көрсеткіштік* a^x және *логарифмдік* $\log_a x$ қажетті және жеткілікті деңгейде игеріп шығатын болады.

Қалған екеуі – *тригонометриялық* және *кері тригонометриялық* функциялар "*шек*" және "*функциялық қатар*" зерттеу құралдарын игеруді талап етеді. Дәл айтқанда, әдеттегі $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ функцияларының *геометриялық* анықтамаларымен қатар *аналитикалық* анықтамалары да бұл "Оқулықта" беріледі. Және де, бұл осы тақырыптың өзекті жері: негізгі тригонометриялық функциялардың дәрежелік қатар түріндегі аналитикалық анықтаманың геометриялық бейнесі геометриялық анықтаманың дәл өзі болып шығатыны көрсетіледі.

Кері тригонометриялық функцияның бар болуы және де әр негізгі элементар функцияның Тейлор формуласы арқылы кез келген дәлдікпен жуықтап есептеу мүмкіндігі осы "Оқулықтағы" дифференциалдық және интегралдық есептеудің үлесі.

Осының бәрін "Оқулықтан" игеріп алу үшін Бірінші тараудағы математиканың негізгі түсініктерін – символдық белгілеулерді, қолданатын терминдік сөздер мағынасын, дәлелдеме затын, бір сөзбен айтқанда, бәрін сана деңгейінде игеру керек.

Әсіресе сан ұғымы егжей-тегжейлі берілген. Соның ішінде нақты сандарды анықтайтын 17 аксиома салдары болып табылатын қолданыстағы негізгі қасиеттердің дәлелдемелеріне ерекше көңіл аудару керек. Бұндағы сандардың қасиеттері бастауыш мектептен белгілі, сондықтан не туралы сөз болып тұрғанын түсінуде қиыншылық болмайды. Ал дәлелдеме жүргізу жолдары нағыз *"математикалық тәрбие"* сабақтары болып, *"математикалық жетілуге (зрелость)"* әкеледі.

Геометрия пәнінің орны бөлек болса да, нақты сандардың саны 17 болатын аксиомалардан оның қолданыстағы барлық негізгі қасиеттерін шығарып алу геометрияның методологиялық міндетін атқарады.

Бұны былай да түсінуге болады: көп жағдайда, өмір болсын, басқасы болсын, әдетте *"не өгіз өледі, не арба сынады"* жағдайда шешім қабылдау керек болады, әрине, мүмкіндігінше ең ұтымды. Міне осыны геометрияға ұқсатуға болады – кездескен жағдайды "аксиомалар жүйесі" ретінде қабылдай отырып, әрі қарай үйренген логикалық таразылау арқылы тиісті қорытындыға келу керек.

Мектеп тақырыбын жалғастыра отырып, кейбір осы күнге дейін орын алып келген оқулықтардың олқылықтарының бірін атап өтейік: мектеп бағарламасының түрінен табылатын "теңдеу" ("теңдеме" деп те атайды) ұғымының анықтамасы түгіл, қандай да болсын түсіндірмесі берілмейді.

Әрине, Бірінші тарауда ол да табылады. Бұның бәрін мектеп мұғалімі сабақта оқушыға айтпайды, айту да керек емес. Бірақ оның пәнін қажетті деңгейде толық және терең түсінгені өзіне жалпы рухани тірек пен кәсіби еркіндік беріп, әр оқушының өзіндік әртүрлі талабына сай жоғары методикалық және методологиялық биіктікте түсіндірулер бере алады.

Және де келешекте математика оқу пәні ретінде кездеспейтіндерді оқыту қосымша қиындық тудырады да, мұғалімнің жоғары сапалы дайындығы ол жағдайда да математика "затымен" қажетті көлемде кәсіби деңгейде түсіндіруге мүмкіндік береді.

Сонымен, айтылғанның бәрін осы "Оқулықтан" игерген математика пәнінің мектеп мұғалімін өзін *"таптырмайтын"* деп айтатындай өте жоғары сапалы маманға айналдырады. Және де сол адам барлық материалдық және моралдық талаптарға сай болып, мемлекеттің негізін құрайды: өз елінің күрделі кезеңінде Отто фон Бисмарк (1815-1898) айтқандай *"Мектеп мұғалімі соғысты жеңдірді"*, сондай баға А. П. Киселевтін (1852-1940, орыс педагогі) белгілі мектеп математикасының оқулығына да берілген.

19. Алдымен – математикалық анализ, соның ғана негізінде – методика мен методология. Сонымен, мектеп математикасының мұғалімі алдымен математикалық анализді керекті деңгейде (ол жоғарыда бөлек сөз болған) игеруі қажет, сонан соң ғана әртүрлі методика мен методология орын алады, және де қазақ шәйіндегі сүт пен шәй тәрізді бұлардың орындарын алмастыруға болмайды.

Жинақтап айтқанда, әр мемлекет математикалық анализден арыла алмайды, өйткені *"Ұяңда не көрсең, ұшқанда соны ілесің"* дегендей, бала бақшалары мен мектепсіз болмайды. Мектепте бірінші кластан соңғысына дейін математика өтіледі, және де, жоғарыда бірнеше рет айтылғандай, мектеп математикасы "жеңілдетілген" математикалық анализдің дәл өзі. Бала бақшасының тәрбиешісіне "2+2=4" қалай болатынын, әрине өз деңгейінде, үйрету керек, ал бұл да математикалық анализ.

Бірақ, мәселе басқада – математиканы жетік түсінуде! Себебі бұл негізгі талап орындалған жағдайда мектеп мұғалімі болсын, кез келген дәрежедегі ғылыми атақты жоғары мектеп оқытушы болсын, сабақ үстінде қаншама терминдер және символдармен бөленген сөз ағымын төгілтіп, класс пен аудиторияны жаңғыртып жатса да, пән мағынасымен жұғыспай, тіпті қайшы келуі де мүмкін.

Қысқасы, өзі пәнді жетік түсінбеген, оқыту кеңістігін ғылыми терминдермен жүйесіз шулатқан ұстаз шәкіртін үйрету мүмкін емес.

Мектеп оқулығындағы әр олқылық халыққа оқтай тиеді. Мәселен, екі жай бөлшекті қосу үшін олардың білімдерінің ең кіші ортақ еселігін табу есебіне тіреп қойғаны сол қосу амалын еш пайдасыз шексіз қиындатып, жаппай білімсіздікке әкеледі.

Қолданыстағы жоғары ғылыми дәрежелі авторлық ұйымының мектеп оқулығында *"$3^x = 80$ теңдеуін шешу үшін логарифм ұғымы енгізіледі"* делінген. Бұл болса, мүлдем қате – ондай теңдеу шешу үшін жаңа функция енгізілмейді, мәселен, дәл бір оң мәнді шешімі бар сол тәрізді $x \cdot 3^x = 80$ теңдеуін шешу үшін тағы жаңа функция енгізу керек пе?

Логарифм керек, бірақ басқа себептермен – оған Бірінші тараудың арнайы параграфы арналған.

20. Мектеп математикалық оқулығына талаптар.

Мектеп оқулығы жайлы А. Н. Колмогоров "*Оқулықтың күрделілігі ұшақтың жаңа түрін құрастырудан кем емес*". Халықаралық деңгейдегі математика мен информатиканың кең спектріндегі барлық ізденістер мен нәтижелер орта мектеп пен Жоғары оқу орындарын барлық бағдарламалық сұрақтар бойынша тереңірек түсінуге және тікелей қолданыс табатын әдістемелік шешімдір шығаруға мүмкіндік береді.

Кеңестік дәуірде мектеп математикасының айнасы "Математика в школе" журналы болатын. Белгілі математиктер сонда мақалалар басып, әр оқулықты аяусыз талқыға салған. Оқулыққа берілген рецензиялары рецензиялары жарияланды.

Оқуға түсу емтихандарының сараптамалары да жарияланды. Сол уақыттағы оқуға тапсырушылар математикалық индукция әдісі мен иррационалдықты нашар түсінеді делінген, есімде, мектеп жылдарында өзімде де солай болған. Осы түсінуге қиынырақ тақырыптар, негізінде мүлдем басқаша, мүмкін нақтырақ мазмұнда 2000 жылғы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің "авторлық ұжым – баспа" форматында өткізген Конкурсының жеңімпазы ретінде қазақ және орыс тілдерінде жазылған "Алгебра және анализ бастамалары" оқулығында берілген.

Физика-математикалық бағытта мамандырылған мектептің басты көрсеткіші – ол мектеп бітіргеннен кейін университет қабырғасында математикалық анализді терең игеруге жеткілікті білімді беру. Әрі қарай, талаптарды азайта келе – техникалық және экономикалық мамандықтарда жоғары математика курсын меңгеру үшін дайындықтың болуы. Жалпы орта мектепте математика бойынша стандартты мектеп бағдарламасы "Математикалық кемелденуге" бағытталуы тиіс. Бірақ есепті шешуге ғана бағытталмай, математиканы оқытудың өзіндік негізгі мақсаты болатын нақты ғаламды сандық және сапалық тұрғыда қабылдай алуға жетуі керек (мысалы, журналист үшін квадраттық және логарифмдік теңдеулер шешімі мүлдем керексіз, бірақ математикалық тәрбие баяндалып отырған оқиғаларды басты және екінші кезектегілігін сәйкес таразылап, оны өз мақаласында барынша мәліметті және логикалық тұрғыдан мінсіз құру қажет).

Мектеп мұғалімі елес деңгейінде математика құрылымы мен ең ұтымды аз көлемде математикалық анализ курсын түсіну қажет, себебі мектеп математикасы математикалық анализдің жеңілдетілген түрі.

21. Мектеп математикасы – жалпы ұстанымдар.

1^0 . Амалдарды орындау мен теңдеулерді шешуді "затын" түсінбей, жаттанды түрде ғана қаншама орындаса да (он немесе жүз рет), тақырыпты еркін меңгеруге алып келмейді.

2^0 . Жалпы өмірде, соның ішінде, кез келген тестік тапсырмалар кезінде есептеу амалдарын дағдылы түрде орындай алу қажет, – бұл бірінші этап.

3^0 . Екінші этап, бұл оқушыға берілетін математикалық тәрбиенің бастысы, орындайтын не енгізілетін амалды түсіндіруден тұрады – ұғымының өзін "Бұл не және не үшін қажет?" деген сұрақ бойынша есептеулерде ***аналитикалық*** және суреттер арқылы көрнекі ***геометриялық*** талқылаулардан тұрады (бір рет түсініп, одан кейін ұмытуға да болады).

4^0 . Амалдардың мағынасының түсіндірмесін және жазу түріндегі өрнектелуін кейін ұмытуға болады, бірақ оларды "түйсік түбіне" орнататын түсіну сәті болуы қажет, бұрында айтылғандай "Ой түбінде жатқан сөз шер толқытса шығады".

5^0 . Мұғалім мектеп математикасының математикалық анализ түрінде жазылған барлық теориялық негіздерін жалпы да, егжей-тегжейлі де түсінуі қажет, – өйткені өзің жетік түсінбейтінді біреуге жететіндей түсіндіру мүмкін емес.

6^0 . Математикалық анализді барлық тереңдікте игерген мұғалім кез келген деңгейдегі оқушыға бейімделе алады – методикалық вариативтілік дегеннің өзі де осы.

7^0 . Көптеген мектеп тақырыптары бойынша өзіндік "қолтаңбасымен" тікелей қолданысты әдістемелік шешімдерді көп мөлшерде жинақтаған мұғалім, анықтама бойынша, "Тәжірибелі ұстаз".

8^0 . Тәжірибелі ұстаздардың ең мықтысы ғана әдістемелік мақала жаза алады, ал мықтылардың мықтысы ғана мектеп оқулықтарының авторлары мен авторластары бола алады.

9^0 . Жалпы теориялық ғылыми-әдістемелік зерттеулер нақты оқыту барысында бала психологиясына, жас ерекшеліктеріне және сол сияқты кездесетін жәйттерге сәйкестендіріледі.

1^0 . Мектеп математикасында ғылым ретіндегі математиканың қатаң құрылымын ұстанымға алудын қажеті жоқ (бүтін, рационал және иррационал сандардың топтық қасиеттерін – коммутативтілігін, ассоциативтігін дәлелдеу сияқты).

11^0 . Мектеп математикасында дәлелдеулерді "шындық тәрізді талқылаулармен" алмастыруға болады.

12^0 . Түсінуге қиын ұғымды, одан да түсініксіз ететін сөздермен беретін, тіпті не жайлы сөз болып жатқанын маманнның өзі де түсіне алмайтындай, "түсінікті" түсіндірмесін болғызбау (Мысал: кеңес оқулықтарында фунцияны тәуелді және тәуелсіз айнымалылар арқылы бергені).

13^0. "Формула", "өрнек", "шама", "тура және кері пропорционалдық" тәрізді барлық қолданылатын атаулар мен терминдер "өз-өзінен түсінікті" дегенге сүйенбей қажетті көлемде түсіндірілуі керек. Ол, әрине, оңай емес және бала психологиясымен сәйкестірілген, мұқият ой елегінен өткен сөздермен берілуі міндет. Нәтиже бірден білінеді – математика қабылдауға жеңілденіп, оқуға қызықты болады.

14^0. Барлық мүмкін жерлерде білім алушы неге, немен және не үшін айналысып жатқанын соны жетік түсіндіретін арнайы әдістемелік ізденістер арқылы білуі қажет (мысалы, бөлімдері әртүрлі бөлшектерді қосу – оның күрделі қиыншылығы неде және сол қалай шешіледі, сонда біріншісі таң қалдырса, екіншісі – адам ақыл ойының күшіне сүйсіндіреді).

15^0. Мектеп математикасы кең адами өлшемде өнімділігі аз есептерді тікелей формула қолдану деңгейінде шығарумен шектелмеуі қажет, ол– физика, химия, биология, астрономия, география және барлық гуманитарлық ғылымдардан алынған энциклопедиялық білімді сандық және сапалық логикалы ойлауға мүмкіндік беретін "математикалық жетілуге" (кеңес дәуірінде орта білім құжаты "Жетілу аттестаты" деп аталағандай) әкелуі керек.

16^0. Мектеп тақырыптарын дамытқанда қандай да бір қолданыс мағыналы есепке немесе қандай да бір бақылауға ұстанған жөн.

Мәселен, бөлшектерді кесінді ұзындығын өлшеу есебін шешу арқылы беруге болады және солай беру керек.

22. Бірінші тарау қалың халыққа "математикалық жетілуге" тура жол. Бірінші тарау өз "математикалық жетілуін", және де шектер теориясы мен дифференциалдық -интегралдық есептеусіз, қалыптастырғысы келетін оқудағы студенттерге де, дипломды математик, информатик, физик, химик, биолог, сондай-ақ техникалық мамандықтардан бастап финанс-экономикалыққа дейінгілерге де мүмкіндік береді.

Математика мұғалімдері бұл I-тарауды міндетті түрде, оған *"Функцияның шегі"* атты III тараудағы Бірінші параграфты қосып, бір айнымалы жағдайындағы II-VII және X-XI тараулармен жалғастырып кәдімгідей игергенде, толық көлемді математикалық тәрбиесін алады.

23. Ұлт – мемлекет деңгейіндегі керек математикалық анализ өмір жолын ғылым не болмағанда қолданбалы информатикамен байланыстыруды жоспарлаған адамға да керек.

Интернет деңгейіндегі бірнеше жол мәліметті адам 4-ші индустриялық революция заманына жат болып келеді, бірақ күңгірт болашаққа бейімделу мүмкіндігін игерілген математикалық анализ береді.

24. Ғылыми нәтиженің әдемілігіне сүйсінген Борель мен Мейнардус 1885 жылғы Карл Вейерштрасстың *"Кесіндідегі кез келген үзіліссіз функцияны кез келген дәлдікпен алгебралық көпмүшеліктермен жуықтауға болады"* деген теоремасының (ол төменде 2(§7, IX тарау)-пунктте екі түрде және де 4 (§5, XIX тарау)-пунктте периодтық жағдайдағы тағы бір түрде дәлелденеді) басқа дәлелдемелерінің тізімін жасапты.

Осы сияқты, математикалық анализді терең игерген адам математиканың көптеген ғажайып жетістіктерін түсінетіндей болып, талай әдемілікке бөленеді.

25. Ғылымда былай да болған. Математиканың жүйелі түрде дамуы Александрия қаласында шоғырланған грек өркениеті болып табылады. Сол қала үш кезеңде қазіргі дәуірге дейінгі 47 жылы римдіктермен, 392 жылы христиандармен және, соңында, 640 жылы мұсылмандармен тоналған.

Алла Мұхаммед Пайғамбар (22. IV. 571-8. VI. 632) арқылы жеткізген ислам діні шашыраған араб тайпаларын біріктіріп, олар Инд өзенінен Гибралтар бұғазына дейінгі орасан жерде жайылған Араб халифатын құрды. Жаңа дінді дүниежүзіне тарату мақсатында онда Құран кітабын өрнектеуге қажетті дарынды шеберлерді жоғары мәдениетті елдерден жинақтады.

Сол кездегі Халифат басшыларының көрегендігі соншалық, Құран қызыметтерімен байланысты араб тілі мен жазуын әрі қарай дамытқан, сонымен бірге жалпы деңгейі өскен мамандарды таратып жібермей сақтап қалады. Қолдарына тиген гректердің еңбектерінің сақталған үзінділерін осы мамандар арқылы араб тіліне аударып, оның қатарына Үнді ғылыми жетістіктерін қосып, жаңа өзіндік зерттеулерді бастап, нәтижесінде дүниежүзіндегі математика, астрономия, медицина, философия, жалпы гуманитарлық ғылымдарда алда болған. Солардың арасынан *Екінші Аристотель* аталған қазақ әл-Фараби де табылады.

Бұл өркениеттің көтерілуі мен өшуін әйгілі француз ғалымы Эрнест Ренан (28. 02. 1823-12. 10. 1892) былай суреттеген: *"... жер бетінде екі деңгейдегі ұлттар бар: біреулерінің ғалымдары бар болса, екіншілерінікі жоқ. Бұл екіншілері қаншалықты интеллектуалды құлдырауда болса, соншалық саяси құлдырауда да болады. Мұсылмандық Шығыс еуропалық Батыспен бәсекеде болып, тіпті XVI ғасырға, яғни қазіргі ғылымның пайда болуына дейінгі аралықта олардан басым болды. Мұсылмандық әлем XIII ғасырда құрсағындағы ғылым ұрығын тұншықтырып, өзінің құлдырауына келді.*

"Болмасаң да ұқсап бақ" дегендей қазақ математикалық анализ игеру негізінде ғылым-білімде шексіз көтерілуі керек.

26. Жоғары мектеп математикалық анализден басталады. Орта мектептен жоғары мектепке көшсек, онда өз кезеңінде физика, химия, қаржы, техникалық және де көптеген мамандықтарда оқытылатын *"Жоғары математика"* да, математика-информатика ғылымы да математикалық анализден басталатынын айтса болғаны. Бұған қоса, математика ғылымын жалпылап айтқанда математикалық анализ деп бағалауға, кемінде *"үзіліссіз математика"* деп оңашаландырып, оны математикалық анализдің жалғасы деуге де болады.

27. Математика негіздерін білмеген мәңгілік заман талаптарына сай болып, ғылымға терең бойлай алмайды.

Физикадан СССР Ғылым академиясының академигі А. А. Мигдал айтқандай *"... жаңалық ашуға ұмтылудың өзі ғылыми жұмыс үшін тіптен залалды болуы мүмкін. Ғылыми қызметкердің міндеті жаңалық ашуға ұмтылу емес, оны қызықтыратын сұрақты кәсіби және терең зерттеуге ұмтылу болып табылады. Ал ашылым-жаңалық әрқашан осы зерттеудің қосалқы өнімі ретінде пайда болады"*.

Математиканың ежесімен зорға танысып алмай жатып, бірден ғылыммен айналысуға кіріседі: біріншіден, терең базалық білімсіз, әрине, кейбір сирек кездесетін жағдайларды ескермегенде, жеңіл-желпі немесе белгілілерді көшіру сияқтылар болмаса, терең ғылым алынбайды, екіншіден, кезінде игерілмеген білім "шоқтығы биік" нәтижеге ие болдым деп мәлімдеген сәтте маман атағына жарамсыз келетін сәтсіздіктерге ұшыратып, өзінің "кек қайтару" қасиеті көрсетеді, сан уақыт бұрын Салтыков-Щедрин айтқандай *"өзін-өзі аса мақтау жүйесі жанға жайлы түс көру себебі болуы мүмкін, бірақ сонымен бірге, өте өкінішті оянумен аяқталады"*.

Осыған байланысты, дәл мағыналы ғылымдардың, алдыңғы кезекте математиканың гуманитарлық және әлеуметтік ғылымдардан айырмашылығы бар екендігін айта кетейік. Мұнда, зерттеудің тақырыбының өзін ғана түсіну үшін өте салмақты фундаментальді дайындық қажет.

28. "Бұрынғы өткен заманда, дін-мұсылман аманда" осылай да болған. Бұның бәрін өз басымнан кешкенмін. Қазақстандағы ең жоғары оқу белгілерімен – мектепті алтын медальмен, сол кездегі жалғыз университетті, қазақтың жоғары білімдегі қара шаңырағы – Қазақ университетінің механика-математика факультетін тек "бес" бағасымен ғана үздік бітіргенмін. Сонан соң Воронежде аспирантурада оқыған Тоқтар Нұрекеновтың бір-ақ ақылы – *"Олар анықтама мен кері мысалдарды ғана сұрайды"* дегенін басшылыққа алып, соңғы ғылыми атақтарымен атағанда СССР және Ресей академиктері С. М. Никольский мен А. А. Гончар, өз ұстазым СССР Ғылым академиясының корреспондент-мүшесі және Ресей академигі П. Л. Ульянов, СССР Ғылым академиясының корреспондент-мүшесі А. Ф. Леонтьев және профессор С. А. Теляковскийдің алдарында бір сағат әдемі және терең сұрақтарына тойтарыс бере алып, "*бес*" деген бағамен СССР Ғылым академиясының В. А. Стеклов атындағы Математикалық институтының аспирантурасына түскенмін.

Білімімнің *"бір қайнауы ішінде"* екенін сезсем де, 22 жасымда нағыз ғылыми ортаға түскенде қазақстандық алтын медаль мен үздік дипломдарымның *"түзы жеңіл"* болып шықты. Ол – ол ма, кейін *"терезем теңелгенін"* мойындатқаннан кейін, менің математикалық сөйлемдерімнің дөрекілігін күлкіге алғандарын еске алатын болды. Не айтуға болады, бәрі дұрыс. Мектепте де, тіпті сол Алматыдағы "қара шаңырақта" да сұрақтарыма күтілгендей жауап ала алмайтын едім – кітаптардан жаттанды сөздерді айта салады. Осының бәрін сол И. Ақбергенов пен С. Боқаевтың жоқтығының салдары деп білемін.

Математикалық түсінігімнің тайыздығын анықтаумен қатар (бұның өзіне де *"Мың да бір рахмет!"*, өйткені өз білімім туралы жалған бағада болып, әрі қарай ұмтылмас едім), сол кездегі Мәскеу, дәлірек айтқанда, Математикалық институт пен Мәскеу мемлекеттік университетінің механика-математика факультеті одан арылуға да мүмкіндік берді.

Біріншіден, ғылыми ұстазым Петр Лаврентьевич Ульянов үш жылдық аспирантураның жартысын математика негіздерінен емтихан тапсыртып қойғызды, екіншіден, аспиранттық достарым Дмитрий Печерский мен Сергей Воронинның ықпалына бөлендім, соңғысы кейін ғылыми ұстазым да болып шықты.

Сөйтіп, математика негіздерін игеріп, сонымен бірге сол кездегі дүниежүзілік математиканың алдыңғы қатарындағы әйгілі Мәскеу математикалық мектебінің түлегі болып, ең жоғары талап қойылатын атақты Математикалық институтта кандидаттық (1973 жылы) және докторлық (1991 жылы) диссертацияларды қорғап шықтым.

Бұған қоса айтарым, себебі математикалық анализбен айналысқаным болса керек, докторлық диссертациям бір жылда дайын болды, қалғандары – қорғау рәсімдері.

29. "Оқулық" тарихы. Әуелі қазақ тіліндегі алғашқы оқулықтарды атап өтейік:

1. О. А. Жәутіков. Математикалық анализ курсы. Алматы, 1958.
2. Х. И. Ибрашев, Ш. Еркегулов. Математикалық анализ курсы. Алматы, т. I, 1969, т. II, 1970.
3. Б. Т. Төлегенов. Математикалық анализден лекциялар курсы. I-бөлім, Алматы, 1973.

Бұл "Оқулық" Мәскеудегі В. А. Стеклов атындағы Математикалық институтының 1969 жылы аспиранты болғандағы кезеңнен (тіпті соған түсу емтиханға дайындықтан десе де болады) бастау алады да, сонан соң Қазақ мемлекеттік университетінде 1974-79 аралығындағы бес жыл бойы қолға тиген жүздеген математикалық анализден оқулықтар игеріліп, методикалық тұрғыдан сарапталады. Сонымен қатар, екі-үш студенттік ағымға математикалық анализден оқылған лекциялар мен семинарлық сабақтарымда ойға келген жаңа әдістемелер студенттерге жеткізгенше асығу үстінде шыңдалады. Бір ғұмыр болатындай 18 жылым – 1979-1997 жылдар арасы,- келесі оқулықтарды дайындау және басып шығарумен өтті:

1. Н. Темірғалиев. Математикалық анализ. Т. I. Алматы: Мектеп, 1987. 288 б.
2. Н. Темірғалиев. Математикалық анализ. Т. II. Алматы: Ана тілі, 1991. 400 б.
3. Н. Темірғалиев. Математикалық анализ. Т. III Алматы: Білім, 1997. 432 б.

Бұл үш томдық басылымның қаншама қажетті екендігін жоғары мектепке арналған оқулықтарының 2004 жылы өткізілген Республикалық конкурсқа қатысқан 600 басылымныкқ 123-і үлкен қолданысты деп табылса, топ жарған үш оқулықтың бірі болғанын атаса да болғаны.

30. "Оқулық" бастаулары ұстазым Петр Лаврентьевич Ульянов (1928-2006) пен ұстазым әрі досым Сергей Михайлович Ворониннен (1946-1997), әйгілі Мәскеу математикалық мектебінің жарқыраған кезеңінде ғылыми тәрбие көргенім деп айта аламын. Оған қоса, өзім математиканың оқыту методикасы мен методологиясы, орта және жоғары мектеп негізіндегі оқулықтармен қатар таза ғылым мен оның қолдануларымен айналысқаным да осы "Оқулық" бастауларына жатады.

Осы "Оқулық" негізінде жатқан ғылыми және методологиялық математикалық тақырыптарын тізіп атасақ – олар мектептегі көбейту кестесінен бастап бүкіл есептеу математикасына қосымша компьютерлерде қолдануға ыңғайланған жаңа зерттеулер еңгізетін өзіміз анықтаған Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, жаңа мазмұнды квази Монте-Карло әдістемелері (бұлар жоғарыда сөз болған Ферма-Эйлер теоремасының XIX ғасырдың математикасының негізгі жетістіктеріне жататын Эрнст Куммердің (1810-1893) алгебралық сандар теориясының математиктердің назарынан тыс қалған оқылуын қолдану негізінде пайда болды), және де солардың ішінде бүкіл математикалық мағынасы бар абсолютті жинақталатын тригонометриялық қатар қосындысы түрінде бейнеленетін функцияны кез келген дәлдікпен әр қайсысының ерекшеліктеріне сай интегралдау, жуықтау теориясының бір үлкен бөлігін ұстап тұрған өзіміз жалпылаған "Смоляк алгоритмі", өзіндік дәрежедегі енгізу теоремалары мен метрикалық функциялар теориясына дейін созылады.

Соның ішінде бір-ақ 2016 жылы тек тақырыптарын атасақ халықаралық информатикада 50 жыл бойы шешілмеген кездейсоқ сандардың генераторларын құру мәселесі шешілген, тағы да 50 жыл бойы дамып келген дискреттік Фурье тез түрлендірулеріне жаңаша дем берілген, 100 жыл бойы ешкім байқамаған Галеркин әдістемесінің бастапқы осалдығы, Сандар геометриясының алгебралық сандар негізінде жаңаша әрі қарай дамуы мен математика-информатикадағы екі есептеу әдістемелері – формула не компьютерлік іздеудің қайсысы тиімді деген мәселеге жаңаша көзқарас,– осындай халықаралық деңгейдегі математика-информатиканың іргетастарын қозғайтын нәтижелер де бар.

Осылардың және бұл тізімге кірмей қалған басқа да зерттеулерді жалғастыру мүмкіндігі бар өзіміз дамытқан тақырыптардың бәрінен алынған әсерлер негізінде бұл "Оқулық", жапондар сурет салғанды емес, әдемілікті көріп түсінгенді суретші деп атайтын тәрізді, математиканың әдемілігін көріп бағалау сезімін тәрбиелеуге бағытталған.

31. Сөз таңдау мәселесі. Кейде сөз қолдану белгілі сақтықты талап етеді. Мысал ретінде "*ұғым*" не сол мағыналы *"түсінік"* сөздерін алайық. Аса тереңдеуді қажет етпейтін мектеп математикасында қолдану мүмкін бұл сөз толық көлемді математикалық анализге келе бермейді.

"*Ұғым-түсінік*" сөзінің орыс тіліндегі "*понятие*" баламасы *"ешкім түсінбейді, ойланбай айта береді"* бағалаумен өте күрделі деп есептеледі. Бұл жөнінде қайсыбір зат не құбылыс жөніндегі көптеген жеке бейнелер түбінде "*ұғым-түсінікке*" айналады деген де пікір бар.

Әрине, әр елдің ғылыми тілі ғылыммен бірге әрқашанда дамуда болады. Қазақ тілінде Дедекиндтің *"... я решил начать думать, пока не найду чисто арифметического и абсолютно* ***строгого*** *обоснования принципов анализа бесконечно малых... . Я достиг этой цели 24 ноября 1858 года... . "*, Абельдің *"... абсолютно отсутствует* ***строгость****"*, Кошидің *"...* ***строгость****, которую я хотел достигнуть"*, Принсгеймнің *"... понятие предела функции впервые с достаточной* ***строгостью*** *определил Вейерштрасс"*, біздің замандағы Липман Берстің *"****Строгость*** *в математике означает* *прежде всего добросовестность и ясность"* тәрізді сөз тіркестері мен сөйлемдердегі ***"строгость"*** деген сөздің бірсөзді баламасы жоқ болып шықты, сондықтан да осы бір сөздің мағынасын беру үшін *"толығымен бірмағыналы, қайшылықсыз және оқылуынан әбден түсінікті анықтамалар мен қолданылған әр амалдың заңдылығы қамтамасыз етілген дәлелдемелер"* сөйлемін қолдануға тура келді.

Ғылыми кітаптарда әдетте ең маңызды деп бағаланатын терминдер былай тұрсын, жай жалпы сөздердің қазақша баламаларына да қиналдық. Және де бұл жалпы мәселе болса керек, мәселен, *"қандай себептермен осымен айналысу керек"* мағынасында қолданатын *мотив-мотивация* деген сөздің баламасы ретінде Тіл білімі институты *себеп* (причина), *дәлел* (обоснование), *сылтау* (отговорка) деп ұсынады.

32. Қазақ тіліндегі математикалық терминдер. Бұл оқулықта бірінші басылымнан бастап қазақтың математикалық тілі дамытылды деуге болады. Бұндағы терминдік ұстанымыз мынадай болады: грек пен латын тілдерінен бастау алып, халықаралық математикада қалыптасқан терминдерді сол түрде қолдану, бірақ *"абсолют"* деген *"абсолютті"* деп қазақшаландырылды, сондай-ақ, қазақшаландырудың тағы бір түрі ретінде *"функция"* орнына *"функсиа"* деп қазақшалау мүмкін болар. Қалғандарына – қазақ тіліндегі қысқа, айтқанда әдемі, естуге жағымды және информативті баламасын табу. Бұлар, өз кезегінде, екі топқа бөлінеді – *"тізбек", "шек"* тәрізді сөзсіз қолданыстағы және әлі де ізденісті талап ететін *ақырлы (конечный)*, *шенелген (ограниченный), шен (грань)* сияқтылары.

Тағы бір ескеретін жәйт, әр жеке терминді аудару – ол істің бір жағы болса, үлкен толық текст үстінде солардың бәрін үйлестіру – мүлдем өзге. Сондықтан, термин өзімен өзі болмай, ғылыми не кәсіби текстте қалай үйқасатынын да көру керек, демек, терминология мәселесі тек үлкен шығармада ғана қалыптасуы тиіс (бұл айтылған, әрине, жеке сәтті ұсыныстарды жоққа шығармайды!).

Терминдік мәселелермен айналысқанда "*не көл, не шөл*" жағдайы да кездеседі. Мәселен, орыс тілінде бір-ақ *"окрестность"*, сондай-ақ, ағылшын тілінде *"neighborhood"* сөзі болса, қазақ тілінде солардың баламалары болатын *"маңай", "төңірек"* және *"аймақ"* синонимдері бар.

Қорытындылап айтқанда, қазақ тілінің байлығы математикалық анализді, басқа еш тілден артық болмаса кем еместей, толық және терең баяндауға артғымен жетеді.

33. "Оқулықтағы" "қаймағы бұзылмаған" қазақ тілі.

Мен мектепті орыс тілінде бітірген едім. Қазақ тілін шет ел тіліндей оқып, басқа ұлтты сыныптастарым (кластастарым) бүгінге дейін үтір (запятая) орнына "түйнек" дегенімді әзілдейді.

Бұның ұтымды жері "орысшаланған" қазақ грамматикасынан тыс болып, қалың қазақ арасындағы ұлттық тіл деңгейінде қалғаным болса керек. Бұны басқа елдерден отанына оралған қазақтардан байқауға болады – өздерімен бірге "қаймағы бұзылмаған" шынайы сөздерімізді әкеледі.

Бұларға қоса тағы бір жәйтті де келтіруге болады. Әйгілі Иоган Вольфганг Гетеның "*Бес ғасыр бойындағы ақындарының ішінен парсылар тек жетеуін ғана бөліп шығарды. Сол тізімге ілінбегендердің арасында менен көп артықтары да бар*" деп атағандардың өлеңдерін еуропалық тілдердің біріне аударушы ескілікті сақтаған бір парсы ауылында бірнеше жыл қоныстансам деп армандаған екен. Менім бала кезім оған жақын өткен болса керек.

Бұл да "Оқулықтың" үлесі болып табылады.

34. Математикалық анализдің сұраныста болу көлемі оқу жүйесінің білім беру және әр студенттің білім алу сапасының тікелей көрсеткіші.

Қайсыбір тілдің әліпбиін білмейтін адам сол тілдегі жазуды *"Әліпті таяқ деп танымайтын"* жағдайына түсінетіндей, математикалық анализді білмейтін адам математиканың өзіне, информатикаға, физикаға, техникаға, финанс пен экономикаға бойлай алмайды, өйткені олардың бәріндегі барлық өзекті мәлімет математика тілінде беріледі.

35. "Оқулықтың бірінші басылымының жарық көруінің кейбір сәттері. Бұл "Оқулықтың" бастап жазылуы мен толық басылып шығуының арасы 18 жыл – өткен XX ғасырдың 79-97 жылдары (байқасаңыз, Ибатолла Ақбергеновтың тұңғыш қазақ атты автордың толық қанды математикалық мақаласының беттерінің екі соңғы цифрлары сондай екен).

Осы кітап Персидский Сергей Константинович басқарған Қазақ кеңес социалистік республикасының Жоғары оқу министрлігінің математика бойынша Ғылыми-методикалық кеңесінің 1979 жылғы шешімімен жазылады.

Бірақ басылып шығу жолы күрделі болды. Сегіз ай бойы әр тәулікте 18 сағат бойы жазылып, 23. V. 1980 аяқталған бірінші том тек 1987 жылы жарық көрді.

ҚазКСР Жоғары білім министірлігінде *"Осылай болған"*. Горбачевтік дәуірдің бас кезінде сондағы қатардағы инспектор Ирина Алексеевна Брянова білім мен ғылым үшін математикалық анализдің маңызының қандай екендігін, сонымен қатар, *"жоғары жақтың қолдауынсыз"* (тамыр-таныстық сол дәуірдің ең үлкен бүлігі еді) көлемі 20 баспа табақ болатын бірінші томды басып шығару тізбесіне қосу мүмкін еместігін түсініп, – батыл (шешуші) қадамға барды. Маған Жоғары білім министірлігінің Басылым жоспарына 5 баспа табақ көлемінде (кейін 70 баспа табақ – 1120 бет болып жарық көрген толық математикалық анализ курсы үшін, әрине, мүлдем қолайсыз) кіруім қажеттігін айтты, мен ештеңе түсінбесем де, айтқанын орындадым.

Сонымен, бір күні кешкісін Ирина Алексеевна шақырып алып, министірліктің Коллегиясының оқулық және ғылыми әдебиет шығару жайлы шешімі қолмен жазылған үлкен ватман плакатын маған үстатып, мұндағы 5 баспа табақ деген жерді сол заманда бір кітап үшін мүмкін ең үлкен көлем – 20 баспа табаққа түзетіп, таңертең плакатты оған қайтаруым керектігін айтты. Сөйтіп, "Мектеп" баспасы түрлі себептермен кейін шегіндіріп келген (бұл да болған) сол 1986 жылдың жоспарына осылайша ендім.

Әрине, "Математикалық анализ" оқулығын 5 баспа табақ көлемінде /Казақ мемлекеттік университетінің Ректорының ұсынысы бойынша Жоспарға енгізген Коллегиядан не қайыр,– осыны жалғыз Ирина Алексеевна түзетіп тұр ғой.

Бірақ, бұнымен де мәселе шешіле қойған жоқ, және де Баспаның кітаптың шығаруын жылдан жылға ысырып отырып, Жоспардан шығарып тастауға да құқығы бар еді.

Соның жалғасында, Жарылқасын Нұсқабаев есімді басқа адам, қысқа ғана мерізімге "Мектеп" баспасының Директор міндетін атқарушы бола қалып, бірінші томды 1987 жылы басуға, ал екінші томды 1990 жылдың Жоспарына енгізген болатын. Әрі қарай, 1997 жылы, жаппай құлдырау кезеңінде, сол Жарылқасын Нұсқабаев жекешеленген баспа қаражатының есебінен қорытындылаушы үшінші томды басып шығарды.

Азаматтық жауапкершілігі жоғары осы адамдар өздерінің қызметтік мүмкіндіктеріне сай келмесе де, әйтеуір ретін келтіріп, мүмкін емес нәрселерді жасағандықтарын баса айта кеткім келеді. Қайталай айтсам, математикалық анализдің білім мен ғылымдағы абсолютті маңызын түсініп, сол уақыт үшін орасан зор ауқымды 70 баспа табақ көлемде мыңдаған таралымда шығарды.

36. Сілтеме жүйесі. Әр тарау параграфтарға, әр параграф пункттерге бөлінген. Әр параграфта формулалар мен теоремалар 1 нөмірінен бастап кездесу ретімен ізінше арабша нөмірленеді. Бір пункт ішінде сілтеме жазылғанындай, бір тарау бірақ өзге параграфтар ішінде – пункт пен параграф нөмірлері көрсетіледі (мәселен, 4 (§2)-пункт не, қысқаша, 4(§2)-п. әлде одан да қысқа 4(§2)), өзге тарауға сілтемеде пункт, параграф және римдік белгілеуде тарау көрсетіледі (мәселен, 4 (§2, III-тарау)-пункт, тағы да, қысқаша, 4(§2, III)-п. және де 4(§2, III)).

Суреттер әр тарауда 1-ден бастап, өзінше нөмірленеді.

"*Тепе-теңдік*" мағынасындағы теңдік "$A \overset{C}{=} B$" таңбасының үстіндегі C сілтемесі "*C себепті A шамасы B шамасына тең*" деген болып табылады.

МАЗМҰНЫ

Функция белгілеулері 5. Функциялар теңдігі 6. Мәндері қабылданатын жиын сандық жиын болатын нақты мәнді функцияларға арифметикалық амалдар қолдану арқылы жаңа функцияларды анықтау 7. Бір функцияның аргументін екінші функцияға ауыстырып жаңа функция – күрделі функция анықтау амалы 8. Функция анықтамасындағы ереже және оның алгоритм түрінде берілуін талқылау 9. Функцияның формула арқылы анықталуы 10. Негізгі элементар және элементар функциялар 11. Функцияның берілген жиынынан оның жиыншасына тарылуы (сығылуы) 12. Тізбек ұғымы функцияның анықталу жиыны оң бүтін сандар болғандағы дербес жағдайы ретінде 13. Функция бейнесі және алғашқы бейнесі 14. Функциялардың түрлері: сюрьективті иньективті және биективті. $f : E \to F$ функциясы берілген болсын 15. Кері функция. Инъективті $E \overset{f}{\mapsto} F$ функциясы өзіне тығыз байланысты жаңа функцияның анықтамасының себебі болады 16. Өзара бірмәнді сәйкестік 17. Эквиваленттi жиындар 18. Ақырлы және ақырсыз жиындар 19. Саналымды жиындар 20. Теңдеу кері функция есебі ретінде 21. Формула сөздерді қолданбай шартты белгілер мен әріптер арқылы ғана математикалық мағынадағы (жалпы жағдайда - ғылыми) сөйлемдерді қысқартып жазу түрі ретінде

§4. САНДЫҚ ЖИЫНДАР 1. Ақырсыз сандар 2. Сандық жиынның жоғарғы және төменгі шендері. Шенелген жиындар 3. Санды жиынның ең үлкен және ең кіші элементтері 4. Сегмент (кесінді) пен интервал. Аралық

§5. НАҚТЫ САНДАР ЖИЫНЫНЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ БАСТАУЛАРЫ МЕН АЛГЕБРАЛЫҚ НЕГІЗДЕМЕЛЕР1. Сандар және өлшеу мәселесі 2. Цифрлар сандардың таңбалары ретінде және сандар бейнелеуінің позициялық жүйесі 3. Алғашқы геометриялық келісімдер 4. Ұзындықты өлшеу есебі – оң бүтін және оң рационал сандар көзі ретінде 5. Рационал сандар мен кесінділер ұзындықтарын салыстырудың геометриялық және аналитикалық негіздемелері 6. «Бөлшектің негізгі қасиеті» атты $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot k}{n \cdot k}$ теңдігінің геометриялық дәләлдемесі 7. Берілген бірлік кесінді бойынша ұзындығы жай бөлшек түрінде дәл есептелген екі жай бөлшекті салыстырудың геометриялық мағынасы мен аналитикалық өрнектелуі 8. Бөлімдері өзара тең жай бөлшектерді қосу амалының геометриялық мағынасы 9. Екі жай бөлшекті қосу ережесі 10. «Жай бөлшектердің айырымының ережесі» 11. «Жай бөлшектерді көбейту» ережесі 12. «Жай бөлшектерді бөлу» ережесі 13. Ерекше 0 (нөл) мен 1 (бір) сандары 14. Сандар жиынын «жаңа» сандар қосу арқылы кеңіту алгебралық мұқтаждығы 15. Теріс рационал сандар $\frac{m}{n} + x = 0$ теңдеуінің шешімі ретінде 16. Барлық бүтін сандар жиыны Z және барлық рационал сандар жиыны Q 17. Рационал сандарды түзу бойында бейнелеу әдістемесі және сол бойынша оларды салыстыру мен кесінді ұзындығын есептеу 18. Теріс мәнді рационал сандарды бағытталған түзуде бейнелеу тәртібі 19. Барлық рационал сандарды өзара салыстыру ережелері 20. Жай бөлшектер қасиеттерінің рационал сандар қасиеттері ретінде қорытындылануы 21. Өлшемдес кесінділер 22. «Кесінділер ұзындығын өлшеу үшін рационал сандар жиыны жеткілікті» және «... жеткіліксіз... » деген не? 23. Берілген әр бірлік кесінді бойынша онымен өлшемдес емес кесінді салу- Пифагор ғылыми мектебінің ұлы ашылымы 24. Әр квадраттың диагоналі оның жағымен өлшемдес емес. Тәптіштеп айтқанда кез келген кесінді алып оны бірлік кесінді деп қабылдап қабырғасы сол бірлік кесінді болатын квадраттың диагоналі кесінді ретінде алдын ала алынған бірлік кесіндімен өлшемдес емес 25. Кесіндінің ұзындығын өлшеу есебінің толық шешімі оң ондық бөлшектердің көзі (бастауы) ретінде 26. Әр кесінді үшін оның ұзындығы болып табылатын ондық бөлшекті құру кесінді өлшеу мәселесінің шешімі ретінде 23. Ондық-рационал сандар 27. Рационал сандардың ондық бөлшектер арқылы өрнектелуі 28. Рационал сандар салынған түзу мән мәтініндегі нақты сандардың ондық бөлшек түрінде жазылуындағы әрбір разрядты цифрдың мағынасы Жинақтап айтқанда 29. Нақты сандар жиыны ақырсыз ондық бөлшек ретінде 30. Нақты сандар жиыны ақырсыз екілік үштік және т. с. с. ақырсыз бөлшектер ретінде 31. Координаттық түзу ондық бөлшек түрінде жазылған нақты сандардың геометриялық интерпретациясы ретінде 32. Түзудің сандық бейнелеуі: әр нүктеге дәл бір нақты сан – оның координатасы сәйкес қойылуы 33. Координаталық түзуде координатасы – нақты сан не дәл сол мағынадағы ақырсыз ондық бөлшек бойынша нүкте салу тәртібі 34. Координаталық түзу бойында рационал және иррационал сандардың орналасуының «тығыздығы» туралы.

§6. МАҒЫНАЛАРЫ КӨРСЕТІЛГЕН НАҚТЫ САНДАРДЫҢ АКСИОМАЛАР ЖҮЙЕСІ 1. Алдын ала ескертулер 2. Аксиомалар арқылы барлық нақты сандар жиыны мен әр нақты санның анықталуы I. Қосу амалының аксиомалары II. Көбейту амалының аксиомалары III. Қосу және көбейту амалдарының арасындағы байланысы IV. Реттеу аксиомалары V. Архимед аксиомасы VI. Жоғарғы және төменгі шендер туралы аксиома 3. Аксиомалардың тікелей салдары 4. Аксиомалардың тікелей салдарының дәлелдемелері

§7. ҚОСУ МЕН КӨБЕЙТУ АКСИОМАЛАРЫНЫҢ САЛДАРЫ 1. Сандар айырымы мен бөліндісі 2. Сандарға қолданылатын төрт амал қасиеттері 3. Қосу және көбейту аксиомаларының салдарының дәлелденулері 4. $2+2=4$ теоремасы және оның дәлелдеуі 5. «Нөлге бөлуге болмайды» ережесі және оның дәлелдеуі

§8 РЕТТЕУ АКСИОМАЛАРЫНЫҢ САЛДАРЫ 1. Реттеу аксиомалары салдарының түсініктемелерімен берілуі 2. Теңсіздіктер аксиомаларының салдарларының дәлелдеулері 3. Санның оң бүтін және кез келген нақты мәнді дәрежелерінің реттік қасиеттері 4. Сандар араларындағы эквивалентті тұжырымдар 5. Эквивалентті тұжырымдардың дәлелдеулері 6. Архимед аксиомасының салдары.

§9. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ИНДУКЦИЯ ӘДІСІ 1. Математикалық индукция әдісі 1°. Айтылым 2°. Айтылымдар тізбегі ақырсыз көп айтылымдардың дұрыстығын тексеру мәселесін тудырады 3°. Математикалық индукция әдісі 4°. Математикалық индукция әдісінің негізінде жатқан идея (түйіні) 5°. Математикалық индукция әдісін қолдану әдістемесі 2. *Ньютон биномы* атты екі айнымалылы көпмүшеліктің нақты мәнді дәрежесін оң бүтін мәніндегі жіктейтін Ньютон формуласы.

§10. БҮТІН РАЦИОНАЛ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ САНДАРДЫҢ НАҚТЫ САНДАР АКСИОМАЛАРЫНЫҢ ЖҮЙЕСІ НЕГІЗІНДЕ ҚҰРЫЛУЫ 1. Аксиомалық жүйедегі арифметикалық амалдар және бүтін сандар мен натурал сандар 2. Рационал сандар және олардың жай бөлшектер түрінде бейнелеулері 3. Оң және теріс мәнді жай бөлшектердің жазылулары 4. Жай бөлшектерді көбейту ережесі 5. Архимед аксомасының салдары ретінде нақты санды бөлшек түрінде бейнелеу әдістемесі 6. Ондық бөлшектер түрінде бейнеленген нақты сандарды аксиомалық түрде анықталған R жиынына еңгізу әдістемесі 7. Ондық бөлшектерге қолданылатын арифметикалық амалдар 8. Жай бөлшектерді қосу ережесі 9. Жай бөлшек жазуындағы сызықшаның « - » мағынасы 10. Оң ондық бөлшектер 11. Санды ақырсыз ондық бөлшек түрінде жазудың ерекшеліктері. 12. Ондық периодты бөлшектер рационал сандардың жазылуы ретінде 13. Периодтық ондық бөлшекті жай бөлшек түрінде жазу ережесі 14. Периодсыз ондық бөлшектер басқа - рационал емес сандардың жазылуы ретінде.

§11. НАҚТЫ САНДАР ЖИЫНЫНЫҢ СУПРЕМУМЫ МЕН ИНФИМУМ 1. Жоғарыдан шенелген сандық жиынның нақты мәнді ең кіші жоғарғы шені (супремумы) 2. Ең үлкен (ең кіші) элементі бар сандық жиынның супремумы (инфимумы) сол ең үлкен (ең кіші) элементтің дәл өзі болады Бұнда барлық ε оң сандары үшін $x_\varepsilon \in E,\, x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$ саны ретінде жалғыз E сандық жиынының ең үлкен элементі $x_{\max} = x_\varepsilon$ саны жарағанына оқырманның назарын ерекше аударамыз. 3. Сандық жиынның супремумын бейнелейтін шарттардың сәл жеңілдетілген түрі 4. Төменнен шенелген сандық жиынның ең үлкен нақты мәнді төменгі шені (инфимумы) Әрине инфимум үшін де бұл анықтамалар (3) және (4) анықтамалары сияқты сәйкес $\beta_0 > \beta' > \beta$ және $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ шектеулер жағдайындағыларға да пара-пар 5. Сандық жиындардың супремумы мен инфимумының сол сандық жиындардың өзінде жататын да жатпайтын да болуларының мысалдары 6. Шенелмеген сандар жиындарының супремум мен инфимумы 7. Супремум мен инфимум қасиеттері.

§12. ОҢ САННЫҢ АРИФМЕТИКАЛЫҚ ТҮБІРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ БАР БОЛУЫ ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА 1. Санды дәрежеге шығару 2. Сан түбірі. Оң санның арифметикалық түбірі және оның белгілеулері 3. Арифметикалық түбірдің «бар болуы» туралы теорема мен одан туындайтын «арифметикалық түбірді жуықтап есептеу» мәселесі математикалық анализ дамуының бірде-бір себебі ретінде 4. Арифметикалық түбірдің бар болуы туралы теорема 5. Иррационал сан бар болуы туралы теорема: $\sqrt{2}$ 6. Архимед аксиомасы мен арифметикалық түбірдің бар болу теоремасы салдары

§13. НАҚТЫ САННЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ДӘРЕЖЕСІНІҢ ТҮСІНДІРМЕЛІ (ДӘЛЕЛДЕМЕЛІ) АНЫҚТАМАСЫ

1. Кіріспе мәліметтер 2. x дәреже көрсеткіші оң бүтін сан ғана емес кез-келген нақты сан болғанда a^x дәрежесін анықтау 3. Нақты санның оң бүтін дәрежесі және оның қасиеттері 4. «Сан дәрежесі» тақырыбындағы мәселесінің жалпы қойылуы 5. Нақты санның бүтін рационал және иррационал дәрежелерінің анықтамалары 6. Нөлден өзгеше нақты санның нөл дәрежесі туралы $a^0 := 1$ келісімін сан дәрежесіне алдын ала қойылған қасиеттер мәжбүр етеді 7. Ерекше $a = 1$ және $a = 0$ сандарының кез-келген нақты мәнді дәрежелері жөнінде келісімдер 8. Нақты санның бүтін дәрежесі және оның қасиеттері 9. Нақты санның оң бүтін дәрежесін кез-келген нақты мәнді дәрежеге тарату «көбейту» амалын «қосу» амалына ауыстыру арқылы «тез есептеу» шешімі ретінде 10. Сан дәрежесін жалпы анықтау мәселесінің қойылуы 11. Дәреже көрсеткішінің кез келген нақты мәні үшін a^x дәрежесі анықтамасының қажеттілігі

§14. САН ДӘРЕЖЕСІНІҢ РАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТЕРІ ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ДӘЛЕЛДЕУЛЕРІ 1. Теріс санның рационал дәрежесі 2. (§14) Сан дәрежесінің көрсеткіші $E = N, Z$ және Q жағдайларында бірте-бірте кеңейе бергенде келесі анықтама соның алдыңғысы арқылы анықталған болса дәл айтқанда $a^{-m} := \frac{1}{a^m}\,(m \in N)\,, a^r \equiv a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ болса Q жиынынан R жиынына өткенде жағдай мүлде өзгереді. a^x анықтамасы x нақты саны рационал да иррационал болғанда да бірдей беріледі - a^r түріндегі сандардың х бойынша құрылған жиынның супремумы (не $0 < a < 1$ болғанда инфимумы) ретінде

§15. САН ДӘРЕЖЕСІНІҢ НАҚТЫ МӘНДІ КӨРСЕТКІШТЕР ЖАҒДАЙЫНДАҒЫ ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ДӘЛЕЛДЕУЛЕРІ

§16. САН ЛОГАРИФМІ – АНЫҚТАМАСЫ ПРАКТИКАЛЫҚ МӘНІ БАР БОЛУЫ ЖӘНЕ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Логарифм – нақты сандарды бір көбейту амалын бір қосу амалына алмастыру негізі ретінде 2. Есептің қойылуы: оң сандарды берілген негізбен дәреже түрінде жазу 3. Сан логарифмінің анықтамасы мен белгілеуі 4. Логарифмнің бар болуы туралы теорема 5. Негізгі логарифмдік тепе-теңдіктер 6. Сан логарифмнің қасиеттері 7. Сан логарифмының қасиеттерінің дәлелдемелері 8. Логарифмнің көбейтудің бір амалын қосудың бір амалына ауыстыратын қасиетінің практикалық маңызы

§17. НАҚТЫ САНДАР ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ҚОРЫТЫНДЫ ТІЗБЕСІ. НАҚТЫ САНДАРДЫҢ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ- АЛГЕБРАЛЫҚ ЖӘНЕ АКСИОМАЛЫҚ АНЫҚТАУ - БЕЛГІЛЕУ ЖОЛДАР 1. Нақты сандардың аксиомалар жүйесімен оның салдарының қорытынды тізбесі 2(§6). Аксиомалар арқылы барлық нақты сандар жиыны мен әр нақты санның анықталуы 3(§6). Аксиомалардың тікелей салдары §7. Қосу мен көбейту аксиомаларының салдары 1(§7). Сандар айырымы мен бөліндісі 2(§7). Сандарға қолданылатын төрт амал қасиеттері §8. Реттеу аксиомаларының салдары 1(§8). Реттеу аксиомалары салдары 3(§8). Санның оң бүтін және кез келген нақты мәнді дәрежелерінің реттік қасиеттері 4(§8). Сандар араларындағы эквивалентті тұжырымдар 5(§8). Архимед аксиомасының салдары 2. Сандарды символдық жазу (бейнелеу) ерекшеліктері 3. Нақты сандар жиынының аксиомалық анықтамалары мен геометриялық құрылымының арақатынасы 4. Ондық бөлшек арқылы кез келген шенелген сандық жиынның супремумы мен инфимумын дәл мәнін бейнелеу ережесі (алгоритмы)

II Т А Р А У. ТІЗБЕКТЕР ШЕКТЕРІНІҢ ТЕОРИЯСЫ

§1. ТІЗБЕК ЖӘНЕ ТІЗБЕКТІҢ ШЕГІ 1. Тізбектің анықтамасы белгілеулері және берілу тәсілдері 2. Тізбектің нақты мәнді шегінің анықтамасы 3. Тізбек шегінің анықтамасының алғашқы талқылаулары 4. Тізбектің шегіне ұмтылуының кейбір мысалдары

§2. «МАҢАЙ» ШЕК АНЫҚТАМАСЫН ҚҰРАЙТЫН ҰҒЫМ РЕТІНДЕ. ТІЗБЕКТІҢ ШЕГІНІҢ (АҚЫРЛЫ ЖӘНЕ АҚЫРСЫЗ) ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАСЫ 1. «Маңай» ұғымына әкелетін шек анықтамасының қосымша талқылаулары 2. Маңайлардың анықтамасы 3. «Маңай» ұғымының кейбір талқылаулары 4. Тізбектің шегінің (ақырлы және ақырсыз) маңайлар тіліндегі жалпы анықтамасы 5. Тізбек мүшелерінің шегіне жоғарыдан және төменнен ұмтылуы жалпы анықтамалардың дәлірек оқылуы жөнінде 6. Кейбір негізгі элементар функциялар бойынша анықталған тізбектердің шектері.

§3. ТІЗБЕКТІҢ ШЕГІ ЖОҚ ДЕГЕН НЕ?1. Сандық тізбектің нақты мәнді шегінің анықтамасын қарама-қарсы тұжырымдау яғни нақты мәнді шектің кері анықтамасы 2. Сандық тізбектің шегінің жалпы анықтамасын қарама - қарсы тұжырымдау 3. « $\{x_n\}$ тізбегінің ешқандай – ақырлы да ақырсыз да - шегі жоқ» деген не?

§4. ШЕГІ БАР (АҚЫРЛЫ НЕ АҚЫРСЫЗ) САНДЫҚ ТІЗБЕКТЕРДІҢ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Алдын ала ескертулер 2. Шенелген және шенелмеген тізбектер 3. Жинақталатын (шегі бар және ақырлы) тізбектердің кейбір қасиеттері 4. Тізбектерге қолданылатын арифметикалық амалдар

§5. АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚ ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ ЖӘНЕ АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТЫ АШУ ЕСЕПТЕРІ 1. Нақты сандарға ұмтылатын тізбектердің қатынасын шек тұрғысынан толық зерттеу 2. $\frac{0}{0}$ түрінде анықталмағандық және «анықталмағандықтыашу» есептері 3. Анықталмағандық және оны ашу мәселелері (жалпы жағдай).

§6. әрқашанда шегі бар монотонды тізбектер 1. Монотонды тізбектердің анықтамасы 2. Монотонды тізбектің шегінің бар болуы туралы теорема 3. Жинақталатын монотонды тізбектердің кейбір мысалдары 4. Сегменттер ұясы туралы теорема монотонды тізбектердің шектерінің геометриялық бейнесі ретінде 5. Нақты санның ондық бөлшек түрінде жазылуы мен «сегменттер ұясы» теоремасы арасындағы байланыс туралы

§7. МАТЕМАТИКАНЫҢ ЖӘНЕ ТАБИҒАТТАНУДЫҢ ЕРЕКШЕ САНДАРЫНЫҢ БІРІ е САНЫНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ МЕН ҚАСИЕТТЕРІ 1. **е** санының анықтамасы 2. e санының ақырлы қосынды түрінде бейнелеуі және сонда пайда болатын қателіктің бағалануы 3. Дәлелденген формуланың теориялық және ғылыми есептеу салдары 4. Негізі е>1 саны болатын натуралдық логарифм 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ шегін табу 1^∞ түріндегі анықталмағандықты ашу ретінде

§8. ТІЗБЕКШЕЛЕР МЕН ДЕРБЕС ШЕКТЕР 1. Тізбекше мен дербес шектің анықтамалары 2. Шегі бар және шенелмеген тізбектердің дербес шектері туралы 3. Шектің барлық мүмкін алты жағдайынан құрылған қайсыбір жиындар қандай сандық тізбектің барлық дербес шектерінен құрылған жиын болуы мүмкін

§9. БОЛЬЦАНО-ВЕЙЕРШТРАСС ТЕОРЕМАСЫ (ӘР ТІЗБЕКТІҢ ЕҢ ҮЛКЕН ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ ДЕРБЕС ШЕГІ БАР БОЛУЫ) 1. Әр шенелген тізбектің нақты сан болатын ең үлкен және ең кіші дербес шегі бар болуы туралы Больцано-Вейерштрасс теоремасы 2. Нақты сан кез келген сандар тізбегінің ең үлкен және ең кіші дербес болуының жеткілікті шарттары 3. Сандық тізбектің нақты мәнді жоғарғы және төменгі шектерінің сипаттамасы 4. Шенелген тізбектердің ең үлкен және ең кіші дербес шектерінің соның мүшелері арқылы біржақты тікелей бейнеленуі 5. Жоғарғы шектің $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n$ және төменгі шектің $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \equiv \lim\limits_{n\to\infty} \inf x_n$ белгілеулерінің мағыналары 6. Кез келген сандық тізбектің ең үлкен және ең кіші дербес шектері бар болуы

§10. КОШИ КРИТЕРИЙІ (ТІЗБЕКТІҢ ІШКІ ҚҰРЫЛЫСЫ АРҚЫЛЫ БЕЙНЕЛЕНГЕН НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БАР БОЛУЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ ЖӘНЕ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТЫ) 1. Коши шарты мен Коши тізбегі 2. Коши критерийі 3. Коши критерийінің жинақталатын тізбектер теориясындағы орны 4. «Таза бар болу теоремалары» мен «бар болуымен қатар құру мүмкіндігін көрсету» зерттеу әдістері.

§11. ЕҢ ҮЛКЕН (ЖОҒАРҒЫ) ЖӘНЕ ЕҢ КІШІ (ТӨМЕНГІ) ДЕРБЕС ШЕКТЕРІНІҢ ТІЗБЕК ЗЕРТТЕУЛЕРІНЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ 1. «Жай» жоғарғы және төменгі тізбектің нақты мәнді шектерінің анықтамаларының арақатынастары 2. Жоғарғы және төменгі шектерді есептеудің бір мысалы 3. Тізбектің нақты мәнді шегі бар болуының дербес шектер тіліндегі критерийі 4. Тізбек шегі ақырсыз болуының дербес шектері тіліндегі критерийі 5. Коши критерийінің тағы бір дәлелдеуі 6. Теңсіздікте шекке көшу туралы теорема 7. Жоғарғы және төменгі шектер арқылы тізбектің кейбір қасиеттерін бейнелеу туралы 8. Шенелген сандық тізбектің жалпы құрылысы.

§12. Тағы да тізбектің дербес шегі туралы және соған байланысты Больцано – Вейерштрасс теоремасының тағы бір дәлелдеуі туралы 1. Сандық тізбектің нақты мәнді дербес шегінің тағы екі анықтамасы 2. Дербес шектің осы үш анықтамаларының эквиваленттілігі 3. Бір ұғымның бірнеше эквивалентті анықтамалары пайдалы болуының Больцано-Вейерштрасс теоремасының дәлелденуінің мысалы арқылы көруге болады . 4. Шенелген тізбектер жағдайында Больцано-Вейерштрасс теоремасы (бар болу сипаттамадағы).

III ТАРАУ. ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ

§1. НАҚТЫ МӘНДІ АЙНЫМАЛЫНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ АНЫҚТАМАЛАРЫ МЕН ҚАСИЕТТЕРІ 1. Нақты мәнді айнымалының нақты мәнді функциясы 2. Координатталған жазықтық (жазықтықтағы тік бұрышты координаталық жүйе) 3. Функциялардың графиктері 4. Функциялардың графиктерін түрлендіру(квадраттық теңдеу жағдайы) 5. Функцияның графиктерін түрлендіру (жалпы жағдай) 6. Функцияның графигі жөнінде жалпы қорытындылар 7. Функцияның геометриялық мағыналы қасиеттері 8. Функцияның шенелуі 9. Функцияның супремумы және инфимумы 10. Тригонометриялық функциялардың анықталу ережелері 11. Периодты тригонометриялық функциялар 12. Негізгі тригонометриялық функцияларыдың берілген анықтамаларының тік үшбұрыш арқылы берілген анықтамалармен пара-парлығы 13. Негізгі тригонометриялық функциялардың негізгі қасиеттері және графиктерінің эскиздері 13. Кері тригонометриялық функциялар 14. Негізгі тригонометриялық теңбе-теңдіктер мен формулалар 15. Негізгі элементар функциялар 16. Негізгі элементар функциялар 18. Элементар функциялар құрылысы 19. Элементар функциялар жазылуындағы яғни формуладағы ережелер 20. Элементар функцияның жазылуындағы оның анықталу жиыны 21. Элементар функцияның анықтамасына кейбір ескертулер 22. Функцияларға жаңа функцияларға келтіретін амалдар қолдану (элементар функцияларынан өзге) 23. Элементар функциялардың негізгі топтары

§2. САНДЫҚ (НАҚТЫ МӘНДІ) ФУНКЦИЯНЫҢ АЙНЫМАЛЫСЫ (АРГУМЕНТІ) НАҚТЫ САНҒА ҰМТЫЛҒАНДАҒЫ ШЕГІНІҢ АНЫҚТАМАСЫ – ШЕК АНЫҚТАМАСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ДЕРБЕС ЖАҒДАЙЫ: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\,(a \in R, b \in R)$. 1. Сандық функцияның шегінің «$\varepsilon - \delta$»-тіліндегі (маңайлар тіліндегі) негізгі жағдайдағы анықтамасы 2. Функция шегінің анықтамасын тікелей қолданудың алғашқы мысалдары 3. Функцияның нақты мәнді шегінің нақты мәнді нүктедегі «$\varepsilon - \delta$»-тіліндегі анықтамасының кейбір талқылаулары. Ойылған маңай. Шектік нүкте

§3. ФУНКЦИЯНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІНІҢ ТІЗБЕКТЕР ТІЛІНДЕГІ АНЫҚТАМАСЫ. ЕКІ АНЫҚТАМАНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІЛІГІ 1. Функциялардың шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасы 2. Функция шегінің анықтамаларының эквиваленттілігі 3. Анықтамадағы шарттарды оның мазмұнын жоғалтпай азайту 4. Екі тамаша шек

§4. НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БАР ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Функцияның локалді шенелгендігі 2. Шек және арифметикалық амалдар 3. Күрделі функцияның шегі 4. Функцияның бір ғана нақты мәнді шегі болуы туралы теорема 5. Шектің жалпы жағдайы туралы кейбір нұсқаулар

§5 МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ БАР БОЛУЫ. ФУНКЦИЯНЫҢ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БОЛУЫНЫҢ ІШКІ ШАРТЫ-КОШИ КРИТЕРИЙІ 1. Монотонды функцияның әрқашанда біржақты шегі бар болуы туралы теорема

§6. НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕ НАҚТЫ МӘНДІ ШЕГІ БОЛУЫНЫҢ ОНЫҢ ІШКІ ҚАСИЕТТЕРІ АРҚЫЛЫ БЕРІЛГЕН КОШИ КРИТЕРИЙІ 1. Коши критерийі 2. Коши критерийінің дәлелдеуі

§7. САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ БІРЖАҚТЫ $\mathbf{l}im_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}+0}\,\mathbf{f(x)}=\mathbf{q}$ ЖӘНЕ $\mathbf{l}im_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}-0}\,\mathbf{f(x)}=\mathbf{q}$ ШЕКСІЗДІКТЕРДЕГІ $\mathbf{l}im_{\mathbf{x}\to\infty}\,\mathbf{f(x)}=\mathbf{q}$, $\mathbf{l}im_{\mathbf{x}\to+\infty}\,\mathbf{f(x)}=\mathbf{q}$ ЖӘНЕ $\mathbf{l}im_{\mathbf{x}\to-\infty}\,\mathbf{f(x)}=\mathbf{q}$ ШЕКТЕРІНІҢ «$\varepsilon-\delta$» (МАҢАЙЛАР) ТІЛІНДЕГІ ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАСЫ 1. «Ойылған маңайлар» кестесі 2. Сандық жиынның шектік нүктелері (жалпы жағдай). Шек ұғымы математиканың негізгі түсініктеріне жатқандықтан соның анықтамасын мағыналы ететін функцияның анықталу жиыны мен шек алынып тұрған нүктенің қажетті байланысы – шектік нүкте арқылы беріледі 3. Функция шегінің жалпы анықтамасы 4. Функция шегінің бұл 36 анықтамалары бір-бірімен мүлдем байланыссыз емес 5. Функцияның шегінің маңайлар кестелері арқылы берілген анықтаманы қолдану жөнінде кейбір нұсқаулар 6. Функцияның нақты мәнді шегінің «$\varepsilon-\delta$» (маңайлар) тіліндегі жалпы анықтамасы 7. Біржақты шектер 8. Ақырсыз нүктедегі шектің «$\varepsilon-\delta$» (маңайлар) тіліндегі жалпы анықтамалары 9. Функцияның «$\varepsilon-\delta$» (маңайлар) тіліндегі жалпы анықтамасының кейбір талқылаулары 10. Шектің «$\varepsilon-\delta$» (маңайлар) тіліндегі жалпы анықтамасының салдары 11. Бұл оқулықта қолданылмайтын «ақырсыз кішкене» және «ақырсыз үлкен» шамалар

§8. ФУНКЦИЯ ШЕГІНІҢ ТІЗБЕКТЕР ТІЛІНДЕГІ ЖАЛПЫ АНЫҚТАМАСЫ. ШЕК АНЫҚТАМАЛАРЫНЫҢ ЭКВИВАЛЕНТТІЛІГІ МЕН КЕРІ АНЫҚТАМАЛАРЫ 1. Функцияның шегінің тізбектер тіліндегі жалпы анықтамасы 2. Функция шегінің екі жалпы анықтамаларының эквиваленттілігі 3. Функция шегінің «$\varepsilon-\delta$» тіліндегі кері анықтамалары 4. Функция шегінің тізбектер тіліндегі кері анықтамасы 5. Функцияның ешқандай шегі болмауы оның екі өзара бөлек дербес шегі болуына эквиваленттілігі 6. Функция шегінің тізбектер тіліндегі анықтамасының монотонды тізбектер арқылы жеңітілген түрі

§9. «АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚТЫ АШУ» МӘСЕЛЕСІНДЕГІ НЕГІЗГІ ТӘСІЛДЕР1. Шектері белгілі функциялардан құрылған функцияның шегінің сол белгілі шектер арқылы бейнеленетін және «анықталмағандық» деп аталатын бейнеленбейтін жағдайлары 2. Функция жағдайындағы анықталмағандықтар 3. «Анықталмағандықтарды ашу» есебін шешудің негізгі тәсілдері4. $0\cdot\infty$ анықталмағандықтың $0^0,\infty^0$ және 1^∞ анықталмағандықтарына эквиваленттілігі

§10. ФУНКЦИЯНЫҢ ЖОҒАРҒЫ ЖӘНЕ ТӨМЕНГІ ШЕКТЕРІ 1. Функцияның дербес шегі және оның эквивалентті анықтамалары 2. Функцияның дербес шектерінен құрылған жиынын анықтау үлгілері 3. Кез келген функцияның кез келген нүктеде дербес шегі бар болуы 4. Локалды шенелген функцияның нақты мәнді жоғарғы және төменгі шектері бар болуы 5. Локалды шенелмеген функцияның жоғары және төменгі шектері туралы

§11. НАҚТЫ МӘНДІ ФУНКЦИЯНЫҢ ӘР НҮКТЕ МАҢАЙЫНДАҒЫ ҚҰРЫЛЫСЫ 1. Нақты мәнді функцияның локалды құрылысының геометриялық суреттемесі 2. Нүктедегі функция тербелісі

§12. ФУНКЦИЯЛАРДЫ САЛЫСТЫРУ. ЛАНДАУ СИМВОЛДАРЫ МЕН ВИНОГРАДОВ ТАҢБАСЫ 1. Ландау символдары 2. Виноградов таңбасы 3. Лаңдау символдарының қасиеттері 4. Эквивалентті функциялар 5. Салыстыру шкаласы мен салыстыру эталондары 6. Тізбектерді салыстыру

IV Т АРАУ. ҮЗІЛІССІЗ ФУНКЦИЯЛАР

§1. ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ НҮКТЕДЕГІ ҮЗІЛІССІЗДІГІ МЕН ҮЗІЛУІ 1. Үзіліссіздіктің геометриялық талқылауларынан шек арқылы берілетін аналитикалық анықтамасына дейін 2. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің әртүрлі символдық жазулары. Аргумент пен функцияның өсімшелері 3. Біржақты үзіліссіздік 4. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің «$\varepsilon-\delta$» (маңайлар) және тізбектер тілдеріндегі анықтамалары 5. Функцияның үзіліссіздігінің кейбір талқылаулары.

§2. НҮКТЕДЕ ҮЗІЛІССІЗ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӘНЕ МЫСАЛДАРЫ 1. Нүктеде үзіліссіз функциялардың шектер теориясының тікелей салдары болатын қасиеттері 2. Элементар функциялардың үзіліссіздігі.

§3. ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕ ҮЗІЛУІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮРЛЕРІ 1. Функцияның нүктеде үзілуінің кері анықтамалары 2. Нүктедегі функция үзілістігін оның себебі болатын жағдайларғажіктеу 3. Функцияның нүктедегі үзілістігі жай және күрделі болып бөлінуі 4. Функцияның нүктедегі үзілуінің 81 түрі

§4 ФУНКЦИЯНЫҢ ЖИЫНДА ҮЗІЛІССІЗДІГІ МЕН ҮЗІЛІСТІГІ 1. Функцияның жиындағы үзіліссіздігі 2. Функцияның жиында үзілуі

§5. МОНОТОНДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІК ПЕН БАЙЛАНЫСТЫЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Байланысты жиындар 2. Монотоны функцияның үзіліссіздігінің жеткілікті шарты 3. Тағы да негізгі элементар функциялардың үзіліссіздігі туралы.

§6. АРАЛЫҚТА АНЫҚТАЛҒАН ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Аралықтың үзіліссіз бейнесінің байланыстылығы (Больцано –Коши теоремасы) 2. Сегменттің үзіліссіз бейнесінің ең үлкен және ең кіші элементтері бар болуы (Вейерштрасс теоремалары) 3. Үзіліссіздіктің бірқалыптылығы 4. Үзіліссіздік және бірқалыпты үзіліссіздік 5. Кантор теоремасы.

VI ТАРАУ. АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

§1. «АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ» ТАҚЫРЫБЫНЫҢ МАЗМҰНЫ 1. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл 2. «Анықталмаған интеграл» тақырыбының мазмұны туралы 3. Интегралдар таблицасы

§2. ИНТЕГРАЛДАУДЫҢ ЖАЛПЫ ӘДІСТЕРІ. РЕКУРРЕНТТІ ФОРМУЛАЛАР 1. Жіктеу әдісі 2. Айнымалыны ауыстыру әдісі 3. Бөліктеп интегралдау әдісі

§3. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯНЫ ИНТЕГРАЛДАУ 1. Көпмүшелікті көбейткіштерге жіктеу 2. Рационал бөлшектерді жай бөлшектерге жікте 3. Рационал бөлшектерді интегралдау 4. Остроградский әдісі

§4. КЕЙБІР РАЦИОНАЛ ЕМЕС ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ 1. Рационалдандыру әдісі 2. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx (r_1, r_2, ..., r_s$ - рационал сандар) түріндегі интегралдар 3. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ түріндегі интегралдар. Эйлер ауыстырулары 4. Дифференциалдық биномның интегралы 5. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ түріндегі интегралды әрқашанда рационалдандыратын $t = tg\frac{x}{2}$ алмастыруы 6. $\int R(\sin x,\ \cos x)\, dx$ интегралын интегралдың жұп-тақ қасиеттері арқылы есептеулерді ықшамдатып рационалдандыру әдістері

VII Т А Р А У. РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. ИНТЕГРАЛДЫҢ АНЫҚТАМАСЫ. ИНТЕГРАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯЛАР 1. Риман интегралының анықтамасы мен оның геометриялық мағынасы 2. Жоғарғы және төменгі қосындылардың кейбір қасиеттері 3. Функция интегралдануының критерийі 4. Риман бойынша интегралданатын функциялар

§2. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Интегралдың сызықтық қасиеттері 2. Күрделі функция мен көбейтіндінің интегралдануы 3. Интегралдың аддитивтік қасиеті 4. Теңсіздікті интегралдау. Орташа мән туралы теоремалар

§3. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ БАСҚА ДА ЭКВИВАЛЕНТТІ АНЫҚТАМАЛАРЫ 1. Интегралдың S-тіліндегі анықтамасы 2. Интегралдың $(U_{2n} - L_{2n})$ -тіліндегі анықтамасы 3. Риман интегралының үш анықтамасындағы функцияға қойылған шарттар жөнінде 4. Интегралдың $(U - L)$ және S -тіліндегі анықтамаларының эквиваленттігі 5. Риман интегралының $(U - L)$ және $(U_{2n} - L_{2n})$ тілдеріндегі анықтамаларының эквиваленттілігі

§4. ИНТЕГРАЛДАУ МЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ 1. Жоғарғы шегі айнымалы болатын интеграл және оның қасиеттері 2. Ньютон-Лейбниц формуласы 3. Интегралды есептеудің негізгі теоремасы (жалпы жағдай)

§5. РИМАН ИНТЕГРАЛДАРЫН КЕЙБІР ТҮРЛЕНДІРУЛЕР. ОРТАША МӘН ТУРАЛЫ ЕКІНШІ ТЕОРЕМА 1. Риман интегралында айнымалыны ауыстыру 2. Риман интегралын бөліктеп интегралдау 3. Қалдығы интегралдық түрдегі Тейлор формуласы 4. Орташа мән туралы екінші теорема

§6. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ 1. Ауданды интегралмен бейнелеу 2. Қисық анықтамасы және оның геометриялық сипаттамасы мен аналитикалық өрнектелуі 4. Қисықтың ұзындығын есептеу 5. Айналу денесінің көлемі 6. Материялық қисықтың статикалық моменті мен ауырлық центрі

§7. РИМАН ИНТЕГРАЛЫН ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ ӘДІСТЕРІ 1. Интеграл туындымен қатар математиканың негізгі ұғымдарына жатады 2. Интегралды жуықтап есептеу деген не? 3. Лагранж интерполяциялық көпмүшелігі және оның жуықтау мүмкіншіліктері 4. Лагранж интерполяциялық көпмүшелігін Риман интегралының жуықтау есептеуге қолдануының әдістемесі 5. Тіктөртбұрыштар әдісі 6. Трапециялар әдісі 7. Параболалар (Симпсон) әдісі

VIII ТАРАУ. САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

§1 САНДЫҚ ҚАТАР АНЫҚТАМАСЫ 1. Сандық қатар және оның жинақталуы 2. Сандық қатарлардың кейбір қасиеттері 3. Қатаржинақталуыныңқажеттішарты

§2. ТЕРІС ЕМЕС МҮШЕЛІ ҚАТАРЛАР 1. Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуының критерийі 2. Теріс емес мүшелі қатардың жинақталуының интегралдық критерийі 3. Салыстыру теоремасы 4. Қатар жинақталуының Коши белгісі 5. Даламбер белгісі 6. Раабе* белгісі 7. Сандық қатар жинақталуы мен жинақталмауының орнықтылығы туралы

§3. ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙДАҒЫ КЕЙБІР ЖИНАҚТАЛУ БЕЛГІЛЕРІ 1. Айнымалытаңбалықатарлар 2. Қатар жинақталуының Коши критерийі 3. Абель түрлендіруі 4. Лейбниц теоремасының тағы бір дәлелдеуі 6. Абель белгісі

§4. АБСОЛЮТТІ ЖИНАҚТАЛАТЫН САНДЫҚҚАТАРЛАР. САНДЫҚ ҚАТАРЛАРДЫ КӨБЕЙТУ 1. Абсолютті жинақталатын сандық қатардың жинақталуы 2. Сандық қатарларды көбейту. Мертенс теоремасы 3. Сандық қатарлар көбейтіндісінің жалпы анықтамасы 4. Еселі сандық қатарлар және олардың жинақталуы

§5. ҚАТАРЛАРДЫ АЛМАСТЫРУ 1. Қатарды алмастыру 2. Абсолютті жинақталатын қатарлардың алмастыруы 3. Абсолютті емес жинақталатын қатарлардың алмастыруы

§6. АҚЫРСЫЗ КӨБЕЙІТІНДІЛЕР 1. Ақырсыз көбейтінді анықтамасы 2. Валлис * формуласы

IX ТАРАУ. ФУНКЦИЯЛЫҚ ТІЗБЕКТЕР МЕН ҚАТАРЛАР

§1. НҮКТЕЛІ ЖИНАҚТАЛУ 1. Функциялық тізбек пен оның нүктелі жинақталуы 2. Функциялық қатар және оның нүктелі жинақталуы 3. Негізгі мәселелер

§2. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ 1. Бірқалыпты жинақталу анықтамасы 2. Функциялық тізбекпен функциялық қатардың жиында бірқалыпты жинақталудың Коши критерийлері 3. Нүктелі және бірқалыпты жинақталу ұғымдарының арақатынасы 4. Функциялық тізбектің бірқалыпты жинақталуының тағы бір критерийі 5. Функциялық қатарлардың бірқалыпты жинақталуының Вейерштрасс белгісі 6. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуының Дирихле және Абель белгілері

§3. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ МЕН ҮЗІЛІССІЗДІК 1. Шектік функция үзіліссіздігі 2. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақталуының жеткілікті шарты. Дини* теоремасы 3. Функциялық қатардың әр мүшесінде шекке көшу туралы

§4. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАНУ 1. Функциялық қатарды мүшелеп интегралдау 2. Шектік функцияның интегралдануы туралы

§5 БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУ 1. Функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдау 2. Жалпы жағдай

§6 ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРЛАР 1. Дәрежелік қатардың жинақталу жиыны 2. Дәрежелік қатардың жинақталу аралығындағы бірқалыпты жинақталуы мен қосындысының үзіліссіздігі 3. Абель теоремасы 4. Дәрежелік қатарларды интегралдау мен дифференциалдау 5. Тейлор қатары 6. Негізгі элементар функциялардың Тейлор қатарына жіктелуі

§7. АНАЛИЗДІҢ КЕЙБІР МАҢЫЗДЫ ТЕОРЕМАЛАРЫ 1. Бірде-бір нүктеде ақырлы туындысы жоқ үзіліссіз функцияның Вейерштрасс берген мысалы 2. Үзіліссіз функцияны көпмүшелікпен жуықтау туралы Вейерштрасс теоремасы 3. Стирлинг* формуласы 4. Тригонометриялық функциялардың аналитикалық анықтамасы

X ТАРАУ. n-ӨЛШЕМДІ ЕВКЛИДТІК КЕҢІСТІК. КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАР

§1. Математикалық R^n құрылымы 1. Математика ғылымы. Математикалық құрылым ұғымы 2. R^1 барлық нақты сандар жиыны 3. Жиындардың тіке көбейтіндісі 4. R^n жиыны 5. Сандық тізбек R^∞ тіке көбейтіндісінің элементі ретінде 6. R^1 негізгі құрылымындағы нақты санның абсолютты шамасы негізіндегі R^n сызықтық кеңісінде норма анықтамасы 7. R^n сызықтық кеңістігіндегі Евклидтік нормасы 8. R^n нормаланған кеңістігіндегі Евклидтің нормасына эквивалентті тағы екі норма 9. Метрикалық кеңістік анықтамасы мен R^n метрикалық кеңістігі 10. Сызықтық R^n кеңістігіндегі стандарттық базис және скалярлық көбейтінді 11. R^n - сызықтық кеңістігі –векторлық кеңістігі ретінде 12. Скалярлық көбейтіндінің геометриялық мағыналары

§2. R^n нормаланған кеңістіктің жиыншалары 1. Тағы да жиындар туралы 2. R^n нормаланған кеңістіктегі маңай (евклидтік норма жағдайы) 3. R^n - дегі маңай (жалпы жағдай) 4. Жиынның ішкі нүктесі. Ашық жиындар 5. Жиынның шектік және оңашаланған нүктелері. Тұйық жиындар 6. Толықтауыш жиын. Ашық және тұйық жиындардың өзара толықтауыш болу қасиеті 7. Жиынның іші сырты және шекарасы

§3. R^n сызықтық кеңістігіндегі шек 1. Тізбек және оның шегі 2. R^n сызықтық кеңістігіндегі тізбек шегінің R^1- дегі шекпен байланысы туралы 3. R^n сызықтық кеңістігіндегі Коши критерийі 4. R^n жағдайындағы Больцано – Вейерштрасс теоремасы 5. Көп айнымалылы сандық функция 6. Көп айнымалылы сандық функцияның шегі

§4. ВЕЙЕРШТРАСС ЖӘНЕ КАНТОР ТЕОРЕМАЛАРЫ. Компакты жиындар 1. Үзіліссіздік анықтамасы 2. Тағы да тұйықтық туралы 3. Вейерштрасс теоремасы 4. Бірқалыпты үзіліссіздік. Кантор теоремасы 5. Компактылық анықтамасы 6. Компакты жиындар 7. Тағы да Вейерштрасс және Кантор теоремалары туралы

§5. БОЛЬЦАНО – КОШИ ТЕОРЕМАСЫ 1. Мәндер жиыны R^m болатын көп айнымалылы функция және оның шегі 2. $R^n \supset E \mapsto R^m$ түріндегі үзіліссіз функциялар 3. R^m сызықтық кеңістігіндегі қисық 4. Дөңес жиындар 5. Қисық бойындағы үзіліссіз функция 6. Бет анықтамасы 7. Скаляр және векторлық өрістер 8. Үзіліссіз функциялардан құрылған күрделі функция да үзіліссіз 9. Больцано – Коши теоремасы (көп айнымалылы сандық функция жағдайы

§6. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ САНДЫҚ ФУНКЦИЯНЫҢ ШЕГІ (ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙ). ҚАЙТАЛАНҒАН ШЕК 1. Көп айнымалыл сандық функция шегінің жалпы анықтамасы 2. Сандық функцияның $\lim\limits_{x\in E, x\to a} f(x) = A$ және $\lim\limits_{x\in E, x_i\to a_i (i=1,...,n)} f(x_1, ..., x_n) = A$ анықтамаларының эквиваленттілігі 3. Екі айнымалылы функция шегін есептеудің кейбір мысалдары 4. Қайталанаған шек

§7. ҮЗІЛІССІЗДІК ЖӘНЕ КОМПАКТЫЛЫҚ ПЕН БАЙЛАНЫСТЫЛЫҚ. ТОПОЛОГИЯЛЫҚ КЕҢІСТІКТЕР 1. Функцияның жиында үзіліссіз болуының критерийі 2. Ашық жиында анықталған функцияның сонда үзіліссіз болуының критерийі 3. Ашық жиынның үзіліссіз бейнесі* ашық емес жиын болуы мүмкін 4. Ашық жиында анықталған функцияның сонда үзіліссіз болуының эквивалентті анықтамасы 5. Ашық жиында анықталған функцияның әр ашық бейнесі ашық болса да функцияның өзі үзілісті болуы мүмкін 6. Үзіліссіздік және компактылық 7. Үзіліссіздік пен компактылықтың төңірегіндегі кейбір талқылаулар 8. Үзіліссіздік пен байланыстылық 9. Топологиялық кеңістік 10. Жиынның байланыстылығы

XI ТАРАУ. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҢ ЕСЕПТЕУІ

§1. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ НҮКТЕДЕГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУЫ ЛОКАЛДЫ СЫЗЫҚТАНДЫРУЫ РЕТІНДЕ ЖӘНЕ СЫНЫҚ СЫЗЫҚ ТӨҢІРЕГІНДЕГІ ЗЕРТТЕУЛЕР 1. Көп айнымалылы сызықты сандық функция және оның функцияның нүктеде дифференциалдануының анықтамасында қатысуы және орыны 2. Көп айнымалылы сандық сызықты функцияның анықтамсы және оның жалпы түрі 3. Сызықтық функцияның коэффициенттері және олар стандарттық базис мүшелерінің сол функцияның мәні ретінде 4. R^n-дегі әр сызықтық функциясындағы скалярлық функция бойынша тікелей бейнеленеді 5. Бір айнымалы жағдайында сызықты функцияның геометриялық бейнесі 6. Екі айнымалы жағдайында сызықты функцияның жалпы түрі 7. Көп айнымалы сандық функцияның нүктеде дифференциалдануы 8. Көп айнымалы функцияның нүктеде дифференциалдануының басқа да өрнектелулері 9. Сызықты функция - атау біреу бірақ орта мектепте және математика ғылымында түсіну өзгеше 10. Екі және үш айнымалылы функцияның нүктеде дифференциалдануының ең қарапайым жазылулары 11. Функцияның нүктеде дифференциалдануының анықтамасының кейбір қосымша талқылаулары 12. Көп айнымалы функцияның ашық жиында дифференциалдануы 13. Көп айнымалы функцияның нүктедегі туындысы 14. Дифференциал - сызықты функция өз функцияның локалды құрылысы бойынша соны бейнелеу мәселесінің қойылуы және шешімі 15. Дербес туынды анықтамасына әкелетін ең қарапай (екі өлшемді) жағдай 16. Көп айнымалылы функцияның нүктедегі дербес туындысы 17. Дербес туындының анықтамасын бір айнымалылы функцияның туындысы ретінде өрнектеу және оның геометриялық суреттемесі 18. Көп айнымалылы функцияның дербес туындысын есептеу мәселесін бір айнымалы жағдайға көшірілуі 19. Нүктеде дифференциалданатын функцияның сол нүктедегі дифференциалын дәл есепте 20. Функция дифференциалдануындағы сызықты функция мен оны анықтайтын дербес туынды орындары 21. Нүктеде дифференциалданатын көп айнымалылы функция сол нүктеде үзіліссіз де 22. Көп айнымалылы функцияның нүктедегі дифференциалын белгілеу туралы келісімдер 23. Функцияның нүктеде дифференциалдынуының жеткілікті шарты 24. Үзіліссіз дифференциалданатын функцияның дифференциалдануы. 25. Градиент және оның $R^n \mapsto R^n$ функция ретінде үзіліссіздігі мен үзіліссіз дифференциалдану пара-парлығы 26. Жиында дифференциалданатын функция сол жиында дифференциалданбауы мүмкін 27. Функцияның графигіне нүктеде жүргізілген жанама

§2. ЖОҒАРЫ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛАР 1. Жоғары ретті дербес туындылар 2. Аралас туындылары нүктеде өзара тең емес функция мысалы 3. Нүктедегі аралас туындар өзара тең болуының жеткілікті шарты

§3. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІ 1. Дифференциалданатын функцияларға арифметикалық амалдар қолдану туралы 2. Күрделі функцияның нүктеде дифференциалдануының (жеткілікті) шарты 3. Лагранж формуласының көп айнымалы жағдайы4. Көп айнымалы функцияның анықталу жиынында тұрақты болуының критерийі 5. Күрделі функцияның дифференциалдануының жеткілікті шарты 6. Күрделі функциялардың дербес туындыларын есептеу 7. Күрделі функцияның жоғарғы ретті дербес туындылары

§4. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ЕРЕЖЕЛЕРІНІҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНУЛАРЫ 1. Дифференциал түрінің инварианттылығы 2. Бағыт бойынша туынды анықтамасы3. Бағыт бойынша туындының функцияның дербес туындысын жалпылау 4. Бағыт бойынша туындының дербес туындылар арқылы бейнеленуі 5. $\nabla f(a) \equiv gradf$ векторының геометриялық мағынасы. 6. Градиент - жалпы жағдай 7. Көп айнымалы жағдайындағы Тейлор формуласы 8. Көп айнымалы жағдайындағы Тейлордың локалды формуласы.

§5. КӨП АЙНЫМАЛЫЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ЛОКАЛДЫ (АБСОЛЮТТІ) ЭКСТРЕМУМЫ 1. Экстремум анықтамасы. 2. Дербес туындылары бар нүктедегі локалды экстремумнің қажетті шарты3. Локалды экстремумның қажетті шартының дифференциал тілінде оқылуы 4. Локалды экстремумның қажетті шарты жеткілікті емес 5. Дифференциал не дербес туындылардың бірі жоқ нүкте локалды экстремум нүктесі болуы да болмауы да мүмкін. 6. $E \subset R^n$ жиынында анықталған f сандық функциясының локалды экстремум нүктесі бола алатын нүктелер қандай шарттарды қанағаттандырады. 7. Локалды экстремумнің сондағы нүктедегі екінші ретті туындыларының мәндерінен құрылған (екі айнымалы жағдайы) 8. Локалды экстремумнің: сәйкес квадраттық форма арқылы бейнеленуі (жалпы жағдай) 9. Символдар критерийі арқылы өрнектелген локалды экстремум критерийлері (жалпы жағдай) 10. Ең үлкен және ең кіші мәндер табу туралы

§6. $f : R^n \to R^m$ ТҮРІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ 1. Дифференциалдау анықтамасы 2. $f : R^n \to R^m$ функцияларының кейбір дифференциалдық қасиеттері туралы

§7. ФУНКЦИЯ АНЫҚТАМАСЫНДАҒЫ ЕРЕЖЕ ТЕҢДЕУ ШЕШІМІ РЕТІНДЕ БЕРІЛЕТІН АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯ 1. Теңдеу оның шешімі және соларға негізделген айқындалмаған функция анықтамасы 2. «$F(x, y) = 0$ теңдеуінің (a, b) шешімі айқындалмаған функцияны анықтайды» дегеннің дәл мағынасы 3. Теңдеу шешімінің бір бөлігі тәуелсіз айнымалы қалған бөлігі соған тәуелді функция мәні ретінде қарастыру амалының геометриялық мысал арқылы жүргізіледі 4. Айқындалмаған функцияның бар болуы мен дифференциалдануы (екі айнымалы жағдайы) 5. Айқындалмаған функцияның бар болуы мен дифференциалдануы (жалпы жағдай) 6. Айқындалмаған функциялардың туындыларын есептеу

§8. ШАРТТЫ ЭКСТРЕМУМ 1. Шартты экстремум анықтамасы 2. Шартты экстремумды локалды экстремумға келтіру туралы 3. Шартты экстремумнің қажетті шарты 4. Лагранждың анықталмаған көбейткіштер әдісі (шартты экстремум қажетті шартының арнайы түрі) 5. Шартты экстремумнің жеткілікті шарттары 6. Мысалдар

§9. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯЛАР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ТАҒЫ БіРНЕШЕ ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ ТУРАЛЫ 1. Кері функция туралы локалды теорема 2. Функциялар тәуелділігі

XII ТАРАУ. ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. ТІКТӨРТБҰРЫШТАҒЫ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ 1. Тіктөртбұрыш 2. Тіктөртбұрыштың бөлшектеуі 3. Жоғарғы және төменгі интегралдық қосындылар 4. Екі еселі Риман интегралының анықтамасы 5. Риман бойынша интегралданбайтын екі айнымалы шенелген функция мысалы 6. Екі еселі Риман интегралын анықтама бойынша тікелей есептеудің бір мысалы 7. Екі еселі интегралдың геометриялық мағынасы

§2. ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ РИМАН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛДАНУЫНЫҢ КРИТЕРИЙІ 1. Жоғарғы және төменгі қосындылардың кейбір қасиеттері 2. Шенелген функция интегралдануының критерийі

§3 ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ 1. Интегралдың сызықтық қасиеті 2. Интегралдың аддитивтік қасиеті 3. Теңсіздікті интегралдау. Орташа мән туралы теоремалар

§4. ЕКІ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫҢ РИМАН БОЙЫНША ИИТЕГРАЛДАНУЫНЫҢ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ 1. Шенелген функцияның интегралдану себептері қандай болуы мүмкін 2. Жазықтықта Жордан өлшемі (ауданы) нөлге тең жиындар 3. Үзіліссіз функцияның интегралдануы 4. Үзіліс нүктелері Жордан өлшемі (ауданы) нөлге тең жиын құратын шенелген функцияның интегралдануы 5. Жордан өлшемі (ауданы) нөлге тең жиындар мысалдарын келтірейік

§5. САНДЫҚ ЖӘНЕ ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ ЖИЫНДАРДЫҢ ЖОРДАН ӨЛШЕМДЕРІ 1. Сандық (сызықтық) жиынның Жордан өлшемі 2. Жазықтықтағы Жордан бойынша өлшенетін жиындар. Жиын ауданы 3. Жазықтықтағы жиынның Жордан бойынша өлшенуінің жеткілікті шарты 4. Жордан өлшеуішінің геометриялық мағынасы 5. Жордан өлшемі нөлге тең жиынның екі анықтамасының эквиваленттілігі 6. Жордан өлшеуішінің кейбір қасиеттері

§6. ЖИЫН БОЙЫНША АЛЫНҒАН ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛ. ИНТЕГРАЛДЫҢ S-ТІЛІНДЕГІ АНЫҚТАМАСЫ 1. Жиын бойынша алынған интеграл 2. Функцияның жиында интегралдануының жеткілікті шарты 3. Жиын бойынша алынған интегралдардың қасиеттері 4. Жордан өлшемі нөлге тең жиын бойынша алынған шенелген функциясының интегралының нөлге тең болуы 5. Жиын бойынша алынған интегралдың аддитивтік қасиеті 6. Интегралды шек ретінде бейнелеу

§7. ФУБИНИ ТЕОРЕМАСЫ 1. Мәселенің қойылуы мен алғашқы болжамдар 2. Фубини формуласында кездесетін кейбір ерекшеліктер 3. Фубини теоремасы 4. Ескертулер мысалдар және қолданулар

§8. БІР ЖӘНЕ ЕКІ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫҢДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ 1. Бір айнымалы Риман интегралында айнымалыны алмастыру 2. Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру мәселесінің қойылуы 3. Қайталанған интегралда айнымалыны алмастыру 4. Екі еселі интегралдың әр түрлі белгілеулері

XIII ТАРАУ. n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ

§1. n-ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ АНЫҚТАМАСЫ 1. n-еселі параллелепипед және оның бөлшектенуі 2. Жоғарғы және төменгі қосындылар олардың кейбір қасиеттері 3. Жоғарғы және төменгі интегралдар. Функцияның Риман бойынша интегралдануының анықтамасы 4. Шенелген функцияның интегралдануының критерийі§2. ЖОРДАН ЖӘНЕ ЛЕБЕГ ӨЛШЕМДЕРІ НӨЛГЕ ТЕҢ ЖИЫНДАР 1. Жордан өлшемі нөлге тең жиындар 2. Лебег өлшемі нөлге тең жиындар§3. ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛДАНУЫНЫҢ ЛЕБЕГ КРИТЕРИЙІ 1. Функция тербелісі 2. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің тербеліс ұғымына негізделген тағы бір критерийі 3. Функция тербелісімен байланысты кейбір қосымша қасиеттер 4. Функцияның Риман бойынша интегралдануының Лебег критерийі

§2. ЖОРДАН ЖӘНЕ ЛЕБЕГ ӨЛШЕМДЕРІ НӨЛГЕ ТЕҢ ЖИЫНДАР 1. Жордан өлшемі нөлге тең жиындар 2. Лебег өлшемі нөлге тең жиындар

§3. ФУНКЦИЯ ИНТЕГРАЛДАНУЫНЫҢ ЛЕБЕГ КРИТЕРИЙІ 1. Функция тербелісі 2. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің тербеліс ұғымына негізделген тағы бір критерийі 3. Функция тербелісімен байланысты кейбір қосымша қасиеттер 4. Функцияның Риман бойынша интегралдануының Лебег критерийі

§4. ЛЕБЕГ КРИТЕРИЙІНІҢ САЛДАРЫ. РИМАН ИНТЕГРАЛЫНЫҢ КЕЙБІР ҚАСИЕТТЕРІ 1. Лебег критерийінің салдары 2. Еселі интегралдың қасиеттері 3. Фубини теоремасы

§5. ЖОРДАН БОЙЫНША ӨЛШЕНЕТІН ЖИЫНДАР 1. Жордан бойынша өлшенетін жиындар 2. Жиынның Жордан бойынша өлшенуінің геометриялық мағынасы 3. Жордан бойынша өлшену критерийі 4. Жордан бойынша өлшенетін жиындардың біріктіру қиылысу және айырым алу амалдары бойынша тұйықтығы 5. Жордан өлшеуінің қасиеттері

§6. ЖИЫН БОЙЫНША ИНТЕГРАЛ 1. Жиын бойынша интеграл анықтамасы 2. Функцияның жиын бойынша интегралдану критерийі 3. Жиын бойынша алынған интегралдардың сызықтық және монотондық қасиеттері 4. Жиын бойынша алынған еселі интегралдың аддитивтік қасиеті 5. Риман интегралы мен Жордан өлшемі нөлге тең жиындар 6. Жиын бойынша алынған еселі интегралдың толық аддитивтік қасиеті 7. Риман интегралы нөлге тең теріс емес функцияның құрылысы туралы 8. Жордан және Лебег бойынша өлшенетін не өлшенбейтін жиындар төңірегіндегі кейбір мысалдар 9. Риман еселі интегралының S-тіліндегі анықтамасы туралы

§7 ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДА АЙНЫМАЛЫНЫ АЛМАСТЫРУ ФОРМУЛАСЫ 1. Жиындарды түрлендіретін функциялар 2. Жордан бойынша өлшенетін жиынның үзіліссіз дифференциалданатын бейнесінің Жордан бойынша өлшенуі 3. Сызықты функция жағдайындағы айнымалыны алмастыру 4. Тағы бір дербес жағдай: f(x)-кубтағы тұрақты фунция g(x)-кез келген диффеоморфизм 5. Айнымалыны алмастыру туралы негізгі теореманың дәлелдемесінің аяқтамасы

6. Ескерілмейтін жиындар 7. Интеграл мәнінің декарттық координаталар жүйесіне тәуелсіздігі 8. Мысалдар

XIV ТАРАУ. ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ

§1. БІРІНШІ ТҮРДЕГІ ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ 1. Тағы да қисықтар туралы 2. Бірінші түрдегі қисықсызықты интеграл – бір айнымалы Риман интегралының жалпылауы 3. Бірінші түрдегі қисықсызықты интеграл бар болуының бір жеткілікті шарты

§2. ЕКІНШІ текті ҚИСЫҚСЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛ 1. Жазықтықтағы облыстар туралы 2. Бір және көп байланысты облыстар 3. Дифференциалдық форма 4. Дифференциалдық форманың интегралы – екінші түрдегі қисықсызықты интеграл 5. Қисықсызықты интегралдың жалпылауы

§3. ГРИН ФОРМУЛАСЫ 1. Мәселенің қойылуы 2. Жазықтықтағы облыстық ориентация 3. Грин формуласының негізгі дербес жағдайлардағы дәлелдеуі 4. Грин формуласының аддитивтік қасиеті 5. Көп байланысты облыс жағдайындағы Грин формуласы

§4. ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ФОРМАНЫҢ АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯСЫН ТАБУ ЕСЕПТЕРІ I. Дифференциалдық форманың алғашқы функциясы бар болуының критерийі 2. Бір байланысты облыста алғашқы функция бар болуының нақты критерийі

XV ТАРАУ. БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР. КЕҢІСТІКТЕГІ НЕГІЗГІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ФОРМУЛАЛАР

§1. АЙҚЫН ТҮРДЕ БЕРІЛГЕН БЕТ ЖӘНЕ ОНЫҢ АУДАНЫ 1. Оң және теріс бағытталған декарттық жүйелер. 2. Тағы да векторлар туралы. 3. Айқын түрде берілген бет. Жанама жазықтық пен нормаль вектор. 4. Бет ауданы.

§2. БЕТ ПЕН ОНЫҢ АУДАНЫ (ЖАЛПЫ ЖАҒДАЙ) 1. Беттің жалпы анықтамасы. 2. Бет бойындағы қисық 3. Кеңістіктегі қисыққа жүргізілген жанама түзу 4. Жанама жазықтық

§3. БЕТ БОЙЫНША АЛЫНҒАН ИНТЕГРАЛ 1. Бірінші түрдегі беттік интеграл 2. Бет ориентациясы 3. Екінші түрдегі беттік интеграл

§4. КЕҢІСТІКТЕГІ ИНТЕГРАЛДАР АРСЫНДАҒЫ ҚАТЫНАСТАР 1. Гаусс - Остроградский формуласы Стокс формуласы

XVI ТАРАУ. СКАЛЯРЛЫҚ ЖӘНЕ ВЕКТОРЛЫҚ ӨРІСТЕР

1. Скалярлық және векторлық өрістер 2. Қисықсызықты интегралдың механикалық мағынасы 3. Беттік иртегралдың физикалық мағынасы 4. Негізгі интегралдық формулаларының векторлық түрі 5. Дивергенция ұғымының инварианттылығы. Соленоидты векторлық өрістер 6. Ротор ұғымының инварианттылығы. Потенциалдық векторлық өрістер

XVII ТАРАУ. МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ

§1. ШЕНЕЛМЕГЕН АРАЛЫҚТА АНЫҚТАЛҒАН МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ 1. Анықтамалар мен мысалдар 2. Меншіксіз интегралдардың кейбір қасиеттері 3. Теріс емес функцияның меншіксіз интегралының жинақталуының критерийі 4. Салыстыру теоремасы 5. Меншіксіз интеграл жинақталуының Коши критерийі 6. Интегралдың абсолютті жинақталуы 7. Дирихле және Абель белгілері

§2. ШЕНЕЛМЕГЕН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРЫ 1. Шенелмеген функцияның интегралының анықтамасы 2. Шенелмеген функцияның меншіксіз интегралының жинақталуы

§3. БІРНЕШЕ ЕРЕКШЕЛІГІ БАР МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ. КОШИ ТЕҢСІЗДІГІ 1. Риманның меншіксіз интегралының жалпы жағдайы 2. Интегралдың бас мәні 3. Коши теңсіздігі

§4. МЕНШІКСІЗ ЕСЕЛІ РИМАН ИНТЕГРАЛЫ 1. Меншіксіз еселі Риман интегралының анықтамасы мен негізгі қасиеттері 2. Теріс емес функциялардың меншіксіз интегралдануы 3. Абсолютті жинақталатын интегралдар

XVIII ТАРАУ. ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ ИНТЕГРАЛДАР

§1. ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ МЕНШІКТІ ИНТЕГРАЛ 1. Параметрге тәуелді интгералдың үзіліссіздігі 2. Параметрге тәуелді интегралды дифференциалдау (Лейбниц ережесі) 3. Лейбниц ережесі кейбір қолданулары 4. Параметрге тәуелді интегралды интегралдау 5. Параметрге тәуелді интегралдың жалпыланған жағдайы

§2. ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛ АЙНАЛАСЫНДАҒЫ НЕГІЗГІ МӘСЕЛЕЛЕР. БІРҚАЛЫПТЫ ЖИНАҚТАЛУ 1. Негізгі мәселелер 2. Параметрге тәуелді меншіксіз интегралдың бірқалыпты жинақталуы 3. Параметрге тәуелді меншіксіз интегралдың бірқалыпты жинақталуының Коши критерийі 4. Кейбір жеткілікті шарттар 5. Дирихле және Абель белгілері 6. Тағы да қайталанатын шек туралы

§3. ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДЫҢ ҮЗІЛІССІЗДІГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНУЫ ЖӘНЕ ИНТЕГРАЛДАНУЫ 1. Параметрге тәуелді меншіксіз интегралдың үзіліссіздігі 2. Меншіксіз интегралды параметр бойынша интегралдау 3. Меншіксіз интегралды параметр бойынша дифференциалдау

§4. КЕЙБІР МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРДЫ ДӘЛ ЕСЕПТЕУ ҮШІН ПАРАМЕТРГЕ ТӘУЕЛДІ МЕНШІКСІЗ ИНТЕГРАЛДАРДЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ 1. $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt$ интегралы 2. Пуассон интегралы

§5. ЭЙЛЕР ИНТЕГРАЛДАРЫ (ГАММА-ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ БЕТА-ФУНКЦИЯ) 1. Гамма-функция 2. Бета-функция 3. Эйлер интегралдарының арасындағы байланыс

XIX ТАРАУ. ФУРЬЕ ҚАТАРЛАРЫ

§1. ФУРЬЕ ҚАТАРЫ ҰҒЫМЫ 1. R^2 жағдайы 2. Функциялық сәйкес жағдай 3. Ортогоналды жүйе (система) жағдайындағы Фурье қатары 4. Тригонометриялық жүйе

5. Тригонометриялық Фурье қатары 6. Ортогоналды және Фурье қатарлары

§2. ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ КЕСІНДІСІНІҢ МИНИМАЛДЫҚ ҚАСИЕТІ. БЕССЕЛЬ ТЕҢСІЗДІГІ 1. Көпмүшеліктер 2. Фурье қатарының кесіндісінің минималдық қасиеті 3. Бессель теңсіздігі 4. Тригонометриялық жүйе жағдайындағы Бессель теңсіздігі. Фурье коэффициенттерінің нөлге ұмтылуы 5. Риман теоремасы

§3. ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛЫ. РИМАННЫҢ ЖИНАҚТАЛУДЫ ЛОКАЛДАНДЫРУ ПРИНЦИПІ 1. Фурье қатарының дербес қосындысының интеграл арқылы бейнеленуі 2. Риманның жинақталуды локалдандыру принципі

§4. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУРЬЕ ҚАТАРЫНЫҢ НҮКТЕДЕ ЖИНАҚТАЛУЫНЫҢ КЕЙБІР ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ 1. Нүктеде жинақталу төңірегіндегі кейбір талқылаулар 2. Үзіліссіз нүктедегі Фурье қатарының жинақталуының жеткілікті шарты 3. Фурье қатарының үзілісті нүктесіндегі жинақталуының жеткілікті шарты 4. Дини теоремасы 5. Дини теоремасының салдары 6. Фурье қатарына жіктеу мысалдары

§5. ФЕЙЕР ТЕОРЕМАСЫ 1. Мәселенің қойылуы 2. Арифметикалық орталар 3. Фейер теоремасы 4. Тригонометриялық көпмүшеліктер жағдайындағы Вейерштрасс теоремасы 5. Парсеваль теңдігі 6. Үзіліссіз функциясының тригонометриялық Фурье қатарының жалғыздығы

§6. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ҚАТАРДЫҢ КОМПЛЕКС ТҮРДЕГІ ЖАЗЫЛУЫ 1. Комплекс сандар мен математикалық анализ 2. Нақты мәнді айнымалының комплекс мәнді функциясы 3. Эйлер формуласы 4. Сандық тізбек 5. Тригонометриялық системаның комплекс түріндегі жазылуы

XX ТАРАУ. Фурье түрлендірулері

§1. ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖЕКЕ НҮКТЕДЕ ФУНКЦИЯНЫ БЕЙНЕЛЕУІ 1. Фурье интегралының анықтамасы 2. Фурье интегралының жинақталуының Дини шарты

§2. ФУРЬЕ ИНТЕГРАЛЫНЫҢ КОМПЛЕКСТІК ТҮРІ 1. Фурье интегралының комплекстік түрі 2. Фурье түрлендіруі мен бастапқы функцияға оралу формуласы 3. Фурье түрлендіруінің кейбір қасиеттері 4. Жылдам азаятын функциялардың Фурье түрлендіруі

§3. ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ МЕН ОНЫҢ КЕЙБІР ҚОЛДАНУЛАРЫ 1. Толқындық тендеу 2. Пуассон формуласы 3. Котельников теоремасы 4. Тригонометриялық функциялардың аналитикалық анықтамасы (§1(III-тарау)-дің 10-14 пунктерінің жалғасы)

Особое внимание обращаем на Главу I *"Математиканың логикалық құрылысы мен талқыланган терминдер сөздігі. Сандардың геометриялық-алгебралық және салдарымен бірге аксиомалық құрылымы негізіндегі математикалық дәлелдеу мәдениеті"*, где для всех, со всяческими дипломами и без, но готовых воспринять дух математики, очень подробно, но в минимальном объеме изложена *"Структура математики"* и *"Культура математического доказательства"*, что сразу же вводит в начало *"Математической зрелости"*.

***

Следующий этап на пути к началу – это школьная математика (первая часть Проекта №5).

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. X – XI классы

Предисловие

Государство и общество несут ответственность перед очередным вступающим в жизнь поколением.

Эта ответственность распространяется на все стороны жизни: здоровье, социальную защиту, образование, культуру и т. п.

Пожалуй, важнейшей из них является образование.

В ансамбле всевозможных школьных дисциплин особое место занимает математика.

Ее особое положение видится в развитии мышления в качественном и количественном аспектах, составляющих основу усвоения других наук. Давно замечено, что из школ, где хорошо организовано преподавание математики, впоследствии выходят высококвалифицированные физики, биологи, химики, экономисты, финансисты, журналисты, юристы, инженеры, врачи, историки, разумеется, математики, и вообще, представители всех сфер науки и культуры.

В любую эпоху важнейшей задачей является формирование содержания образования и его организация - как реальное воплощение выработанного содержания.

Содержание каждой школьной дисциплины должно отражать достигнутый уровень соответствующей науки для понимания и применений, а также создавать условия для его дальнейшего развития.

Программный материал учебника - традиционный, но дополненный введением в теорию вероятностей и математическую статистику.

Роль математики в науке и производстве, в общественной жизни постоянно возрастает, в особенности в связи с развитием компьютерных технологий.

Выбранная в данном учебнике методика изложения сочетает, с одной стороны, минимальное, по мере возможности, привлечение теоретического материала с весьма подробными разъяснениями.

С другой стороны, мы стремились придерживаться *алгоритмической* направленности как при изложении понятий (числа "читаются" по записям их цифрами, функция определяется как правило, представленное в виде определенной последовательности действий над каждым значением аргумента, и даже определение предела функции - в полном объеме), так и для закрепления вычислительных навыков (решение уравнений и неравенств, вычисление производных и т. п.).

Здесь мы основываемся на том факте, что в математике алгоритмические действия, по сравнению с усвоением смыслового содержания материала, относятся к более легким для восприятия.

Такой же подход реализован при изложении темы "Теория вероятностей и математическая статистика", где мы придерживались трактовки вероятности как исчисления шансов реализации при испытаниях того или иного события и избегали не способствующего логическому пониманию предмета эмоционального термина "случайность".

Учебник мы писали с таким расчетом, чтобы программный материал (повторимся, по мере возможности, минимальный по содержанию) был доступен как для изучения учащимися, так и Учителю. С той же целью в конце книги мы дали полное разъяснение наших позиций по каждой теме.

Материал в основной части соответствует среднему уровню математической подготовки, с возможностью существенного углубления по разным направлениям.

Здесь мы хотели бы напомнить ответ Евклида царю Птолемею: "В науке нет царских путей", когда царь, ввиду его особой занятости, просил указать ему легкий путь усвоения математики. Посему, учащемуся, да и Учителю тоже, необходимо будет приложить определенные усилия.

По мере возможности, мы позаботились о том, чтобы эти занятия все время были доступными и содержательными, без затрат усилий на второстепенное и даже ненужное.

Данный учебник - пробный. Мы надеемся на конструктивное сотрудничество с Учителем и учащимися.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность за всевозможную помощь и поддержку, оказанную им в нелегком труде написания данного учебника сотрудникам, аспирантам, стажерам и магистрантам Кафедры математического анализа Евразийского национального университета им. Л. Н. Гумилева, Кафедры функционального анализа и теории вероятностей Казахского национального университета им. аль-Фараби, школ городов Астаны и Алматы, К. Ж. Наурызбаеву, Ануарбеку Баилову, Б. Тулегеновой, М. Сихову, Орынбасару Ажгалиеву, Ш. Ажгалиеву, К. Нуртазиной, И. Ковалевой, М. Берикхановой, Е. Нурмолдину, Ш. Абикеновой, Е. Гречкиной, А. Шомановой.

I. ОПОРНЫЕ ЗНАНИЯ: ПОВТОРЕНИЕ И УТОЧНЕНИЯ

Глава 1. ЧИСЛА

§1. Действительные числа и их записи 1. Множество и числовое множество 2. Математические знаки и условные обозначения слов и словосочетаний 3. Действия над множествами 4. Цифры как числовые знаки и позиционная система счисления 5. Записи действительных чисел – три типа дробей: обыкновенные, десятичные и алгебраические

§2. Обыкновенные дроби как записи рациональных чисел 1. Определение обыкновенных дробей 2. Смысл знака черты « - » в записи обыкновенных дробей 3. Ещё раз о сложении обыкновенных дробей

§3. Десятичные дроби 1. Определение десятичных дробей 2. Особенности записи чисел в виде бесконечной десятичной дроби 3. Десятичные периодические дроби как записи рациональных чисел 4. Правило записи периодических десятичных дробей в виде обыкновенных 5. Десятичные непериодические дроби как записи иных, не рациональных чисел

§4. Координатная прямая 1. Задача измерения. Постановка задачи измерения длин отрезков 2. Недостаточность множества рациональных чисел для измерения длин отрезков 3. Построение по заданному отрезку не соизмеримого с ним отрезка 4. Координатная прямая 5. Смысл каждой разрядной цифры в записи действительного числа

§5. Алгебраические (или рациональные) дроби 1. Понятие алгебраической дроби 2. Применения алгебраических (или рациональных) дробей

§6. О других системах счисления

§7. Комплексные числа. Развитие понятия числа

Глава II. СТЕПЕНИ И ЛОГАРИФМЫ

§8. Степени чисел и их свойства 1. Повторные действия сложения и умножения над одним и тем же числом и их записи 2. Целые положительные степени действительного числа и их свойства 3. Задача распространения понятия степени числа на случай произвольных показателей

§9. Целая степень числа 1. Число в степени нуль 2. Целые отрицательные степени действительного, отличного от нуля, числа

§10. Рациональная степень числа 1. Положительные числа в степени $\frac{1}{n}$ - арифметические корни 2. Положительные числа в рациональной степени 3. Рациональная степень отрицательного числа

§11. Иррациональная степень положительного числа

§12. Логарифм числа 1. Определение логарифма числа 2. логарифм произведения, частного и степени

Глава III. ФУНКЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§13. Функция: определение и её обсуждение 1. Общее определение функции 2. Аргумент (независимая переменная) функции 3. Правило (закон, алгоритм) в определении функции 4. Сужения функции с множества задания на её подмножество 5. Об употреблении букв с индексами 6. Действия над множествами и множества определения функций

§14. Числовые функции 1. Определение числовой (действительнозначной) функции числового (действительнозначного) аргумента 2. Примеры числовых функций числового аргумента 3. Числовые функции многих числовых переменных (аналитический и алгебраический подходы)

§15. Числовые промежутки 1. Числовые промежутки 2. Таблица числовых промежутков 3. Окрестности

§16. Графики функций 1. Координатная плоскость 2. Графики функций 3. Преобразование графиков функций(случай квадратичной функции) 4. Преобразование графиков функций

§17. Последовательности 1. Числовые последовательности $a(n) = a_n$. Арифметическая и геометрическая прогрессии 3. Метод математической индукции 4. Бином Ньютона 5. Простые и сложные проценты. 6. Число e

§18. Геометрические свойства функций 1. Вводные замечания 2. Четность и нечетность функций 3. Монотонность функции 4. Ограниченность функции

§19. Обратные функции 1. Взаимнооднозначное соответствие 2. Определение обратной функции

§20. Непрерывность и предел функции 1. Понятия непрерывности функции на промежутке и разрыва в точке 2. Определения непрерывности функции в точке и на промежутке 3. Определение непрерывности для случая монотонной функции 4. Примеры доказательств непрерывности 5. Точка разрыва функции – как отрицание непрерывности функции в точке 6. Общее определение предела функции 7. Идея, лежащая в основе понятий предела и непрерывности

II. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава V. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ

§21. Степенная функция 1. Определение 2. Свойства

§22. Степенные функции с рациональным показателем

§23. Показательная функция 1. Определение и график 2. Основные свойства

§24. Логарифмическая функция 1. Основные свойства логарифмической функции

Глава VI. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ

§25. Тригонометрические функции как функции расстояний вдоль окружности 1. Перемещение вдоль единичной окружности в заданном направлении на заданное расстояние 2. Определение функций косинус и синус числового аргумента 3. Определение функций тангенс и котангенс числового аргумента

§26. Периодические функции 1. Периодические функции и период функции. Периодичность с периодом 2π функций $cosx$ и $sinx$ 2. Способ записи множества, описывающего заданные свойства периодической функции

§27. Числа, повороты в градусном и радианном измерениях как аргументы тригонометрических функций 1. Системы измерения углов - градусная и радианная 2. Взаимный пересчет градусной и радианной мер 3. Функции $f_c(x) = \cos x$ и $f_s(x) = \sin x$ как функции аргументов: действительного числа x, угла в x радиан и угла в $\frac{180}{\pi}x$ градусов $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ 4. Поворот в заданном направлении на заданные радианную и градусную меры 5. Аргументы тригонометрических функции

§28. Свойства и эскизы графиков тригонометрических функций 1. Свойства функции $f_c(x) = \cos x$ и эскиз ее графика 2. Свойства функции $f_s(x) = sinx$ и эскиз ее графика 3. Свойства и эскиз графика функции $f(x) = tgx$ 4. Свойства и эскиз графика функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$

§29. Базовые тригонометрические тождества 1. Основное тригонометрическое тождество 2. Формулы сложения 3. Формула сложения для функции $f_c(x) = \cos x$ 4. Базовые тригонометрические тождества

§30. Важнейшие тригонометрические формулы 1. Косинус разности двух углов 2. Формулы для дополнительных углов 3. Синус суммы и синус разности двух углов 4. Формулы для двойных и половинных углов 5. Формулы для тангенса и котангенса 6. Сумма и разность косинусов и синусов

§31. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

§32. Формулы приведения

§33. Обратные тригонометрические функции 1. Обратная функция 2. Обратные тригонометрические функции 3. Обратная тригонометрическая функция арккосинус $g(x) = \arccos x$ 4. Обратная тригонометрическая функция арксинус $g(x) = \arcsin x$ 5. Обратная тригонометрическая функция арктангенс $g(x) = arctgx$ 6. Обратная тригонометрическая функция арккотангенс $g(x) = arcctgx$

Глава VII. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§34. Определение элементарных функций 1. Замена аргумента одной функции другой функцией – сложные функции (композиция, суперпозиция функций) 2. Применение в конечном числе арифметических действий – сложения, вычитания, умножения и деления – к определению новых функций 3. Определение элементарной функции 4. Правило, содержащееся в записи элементарной функции – формуле 5. Множество определения элементарной функции, содержащееся в ее записи 6.

Некоторые замечания к определению элементарной функции 7. Задание функции формулой – правило и множество определения

§35. Действия над функциями, приводящие к новым функциям 1. Определение новой функции применением арифметических операций к данным числовым функциям 2. Определение новой функции последовательным применением правил из данных функций 3. Определение новой функции с непересекающимися множествами задания (или их сужений)

III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Глава VIII. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§36. Общие сведения, относящиеся к решению уравнений 1. Еще раз об употреблении знака равенства 2. Уравнение как условное равенство 3. Составление уравнений как метод математического моделирования 4. Постановка задачи решения уравнения 5. Уравнение как задача нахождения значения аргумента по данному значению функции 6. О содержании и целях темы «Уравнения» 7. Множество определения уравнения $f(x) = g(x)$ 8. Системы и совокупности уравнений 9. Равносильные уравнения 10. Преобразования и преобразованные уравнения 11. Равносильные преобразования 12. Равносильные и неравносильные преобразования, задаваемые степенными функциями 13. Равносильные уравнения на множестве 14. Исследование корней преобразованных уравнений – проверка 15. Классификация уравнений

§37. Целые алгебраические уравнения 1. Исследование линейного уравнения 2. Исследование квадратного уравнения 3. Некоторые специальные случаи уравнений высших степеней 4. Метод понижения степени целого алгебраического уравнения

§38. Дробные алгебраические уравнения

§39. Иррациональные уравнения

§40. Показательные и логарифмические уравнения

§41. Уравнения, содержащие абсолютные величины

§42. Тригонометрические уравнения 1. Серии решений уравнений и способы их записи 2. Основные тригонометрические уравнения

§43. Неравенства

§44. Решение неравенств методом интервалов 1. Чередование знаков значений многочлена на интервалах 2. Чередование знаков значений многочлена на интервалах (общий случай) 3. Метод интервалов решения неравенств 4. Равносильность неравенств 5. Случаи, сводящиеся к методу интервалов 6. Иррациональные неравенства

IV. КОМБИНАТОРИКА. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава IX. КОМБИНАТОРИКА

§46. Комбинаторика 1. Основное комбинаторное правило (частный случай) 2. Основное комбинаторное правило (общий случай) 3. Постановка комбинаторной задачи 4. Выборка с возвращением и без возвращения 5. Выборки неупорядоченные и упорядоченные 6. Упорядоченные выборки с возвращением 7. Упорядоченные выборки без возвращения-размещения 8. Перестановки 9. Неупорядоченные выборки из n элементов по k без возвращения - сочетания

Глава X. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§47. Вероятностное пространство – вспомогательная и вероятностная модели 1. Вспомогательная модель 2. Эксперимент (опыт, испытание, явление)и его исход (результат, наблюдение) 3. Вероятностная модель 4. Вероятностная модель подбрасывания монеты

§48. Общие положения теории вероятностей 1. Общая схема построения конечной вероятностной модели – вероятностного пространства 2. Произвели эксперимент, известен исход. Произошло ли событие? 3. Практическое значение вероятности события. Закон больших чисел

§49. Первые вероятностные задачи и способы их решения 1. Постановка вероятностных задач 2. Вероятностные пространства с равновозможными элементарными событиями – классическое определение вероятности 3. Примеры экспериментов с равновозможными исходами

§50. События и их вероятности 1. Алгебра событий 2. Условная вероятность (вероятность при условии) события 3. Независимые события 4. Свойства аддитивности и мультипликативности вероятности

§51. Основные формулы теории вероятностей 1. Формула умножения вероятностей 2. Формула полной вероятности 3. Формулы Байеса

§52. Случайная величина 1. Определение случайной величины 2. Распределение случайной величины

§53. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины 1. Среднее значение 2. Математическое ожидание случайной величины 3. Дисперсия (разброс) 4. Подходы к определению разброса значений (дисперсии) случайной величины

§54. Математическая статистика 1. Предмет математической статистики 2. Оценка вероятности 3. Генеральная совокупность и выборка значений случайной величины 4. Эмпирические законы распределения случайной величины 5. Оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины f

V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА XI. ПРОИЗВОДНАЯ

§55. Задачи, приводящие к понятию производной 1. Скорость в момент времени – мгновенная скорость (модельная ситуация – случай $f(x) = x^2$) 2. Скорость в момент времени – мгновенная скорость (общий случай) 3. Задача о касательной в точке к графику функции (случай функции $f(x) = x^2$) 4. Задача о касательной в точке к графику функции (общий случай)

§56. Производная 1. Определение производной 2. Вычисление производной линейной и квадратичной функций

§57. Вычисление производных дифференцируемых элементарных функций 1. О вычислении производных 2. Техника вычисления производных дифференцируемых элементарных функций 3. Таблица производных основных элементарных функций 4. Правила дифференцирования 5. Таблица производных для сложных функций с внешней – основной элементарной, а внутренней – произвольной функцией 6. Вычисление производных элементарных функций, полученных только повторным применением правила образования сложных функций

§58. Неопределенность и раскрытие неопределенности 1. Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ 2. Замечательные пределы 3. Метод разложения 4. Метод устранения иррациональности 5. Метод, основанный на определении числа e

Глава XII. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

§59. Теорема Лагранжа

§60. Достаточное условие монотонности функции

§61. Исследование функций на экстремум 1. Определение экстремума 2. Необходимое условие экстремума 3. Достаточное условие экстремума 4. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке

§62. Производные второго (и выше) порядка и их применения 1. Производные второго и выше порядков 2. Физический смысл второй производной 3. Выпуклые функции 4. Точки перегиба графика функции

§63. Исследование и построение эскиза графика элементарных функций 1. Схема исследования функций 2. Полное исследование квадратного трехчлена

Глава XIII. ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§64. Первообразная 1. Определение первообразной 2. Уравнения, в которых неизвестная функция находится под знаком дифференцирования - дифференциальные уравнения

§65. Интеграл Римана 1. Площадь криволинейной трапеции 2. Дифференциальные уравнения для площади $S(x)$ криволинейной трапеции 3. Формула Ньютона – Лейбница 4. Применения производной и интеграла к решению задач

К Учителю и учащимся

Концепция учебного комплекса "Алгебра и начала анализа" для X-XI классов в кратком изложении заключается в следующем:

1. Выделить наименьший объем материала, необходимого для завершающего этапа обучения в средней школе и являющегося основой для последующего обучения в высших и средних специальных учебных заведениях.

2. Материал предыдущих I-IX классов должен быть ориентирован на этот завершающий этап.

3. Изложение теоретической части должно быть простым, ясным, коротким и точным. Каждая новая тема, каждое новое определение должно быть мотивированным, по крайней мере, на уровне правдоподобия.

4. Материал задач должен сочетать идейное содержание с развитием навыков, от простого к сложному.

5. Теоретический материал в необходимом объеме должен быть представлен в учебнике для учащихся.

6. Намечается выпуск полного комплекса по математике:

1) Школьная математика: сначала X-XI классы, затем I–IX классы.

2) Университетская математика:

Анализ математический – издан учебник на казахском языке в объеме 70 п. л. (изданы детализированные программы комплекса на казахском, русском и английском языках, объединенного единой идеей изложения):

Анализ действительный,

Анализ функциональный,

Анализ комплексный,

Теория вероятностей и математическая статистика.

В более подробном изложении предлагается следующее.

Числа. Числа относятся к опорным знаниям и являются предметом изучения во всей школьной программе с I по IX классы.

Поэтому содержание этой главы носит характер повторения в систематизированном, но с уточнением, изложении.

Разделяем понятия: есть числа и есть их записи, наподобие того, что есть слова и есть письменность – записи слов.

Роль слов играют числа, роль букв в записи чисел – цифры. Система записи чисел цифровыми знаками – позиционная.

Выделяем три типа дробей для записи действительных чисел: обыкновенные, десятичные и алгебраические.

Равно как по записи буквами читаем слова, так и по записи цифрами читаем числа: числа рациональные (включают в себя натуральные и целые) записываются в виде обыкновенных дробей и периодических десятичных дробей, числа иррациональные – непериодических десятичных дробей.

Числа возникают в процессе измерения.

Модельный случай: задача измерения длин. Берется один отрезок, длина которого принимается за единицу измерения. Берется другой произвольный отрезок, и задача заключается в выяснении того, сколько раз единичный отрезок или какие-то его равные части (доли) уложатся в данном отрезке, – сам процесс измерения записывается посредством цифр, результат измерения есть число.

Числа подразделяются на рациональные и иррациональные.

Если длина отрезка есть число рациональное, то единичный отрезок или его доля целое число раз точно уложится в данном; сами же отрезки – принятый в качестве единичного и данный – называются *соизмеримыми.* Существование несоизмеримых отрезков, т. е. таких отрезков, что никакая доля одного из них целое число раз не уложится в другом, было установлено в школе Пифагора.

Если единичный и данный отрезок несоизмеримы, то длина данного отрезка выражается иррациональным числом, а процедура измерения представляет собой бесконечный процесс.

Геометрическое описание процесса измерения длин отрезков с одним фиксированным концом (началом координат) на данной прямой приводит к арифметизации этой прямой.

Именно, имеются пять особых чисел: 0 (нейтральный элемент по отношению к операции сложения: $0+a=a$ для любого числа a), 1 (нейтральный элемент по отношению к операции умножения: $1*a=a$ для любого числа), , $i=\sqrt{-1}$.

Первые два числа определяют арифметизацию прямой: числам 0 и 1 приписываем разные точки прямой, тем самым однозначно определяются начало отсчета, единичный отрезок (масштаб) и направление на прямой. Тогда каждой точке прямой соответствует ровно одно действительное число – ее координата и, наоборот, каждому действительному числу – ровно одна точка, координата которой и есть это действительное число. В итоге, получаем *координатную* прямую.

Этим закончим описание §§1-5 главы I. Еще раз подчеркнем: главная цель этих параграфов – так же, как по записи слов буквами учат читать слова, научить по записи цифрами чисел понимать заложенный в них смысл в задаче измерения.

Глава I завершается двумя темами для повышенного уровня подготовки.

Принципы записи чисел цифрами достаточно подробно изучались в начальных параграфах этой главы. Поэтому изучение других систем счисления, включая шестнадцатеричную, где десять цифр дополнены первыми шестью заглавными буквами латинского алфавита, по-видимому, не вызовет больших затруднений, и представлены в виде упражнений логического характера.

Тема “Комплексные числа” начинается с обсуждения формул для корней квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом, в котором показывается, что введение еще одного числа $i=\sqrt{-1}$, такого, что $i^2=-1$, при сохранении всех правил действий над числами приводит к разрешимости всякого квадратного уравнения.

Положительное решение, как в данном случае, естественным образом поставленной математической задачи является достаточным основанием для включения нового понятия числа в математический обиход и их дальнейшего изучения. Из свойств комплексных чисел мы ограничиваемся лишь арифметическими свойствами.

Следующая, вторая глава, посвящена степени и логарифму чисел. Степени есть действия над числами: надо научить понимать записи

$$2^3,\, 2^0,\ 2^{-2},\ 2^{\frac{1}{3}},\ 2^{\frac{17}{21}},\ 2^{-\frac{13}{17}},\ 2^{\sqrt{2}},\ 2^{-\sqrt{3}}.$$

Здесь, наряду с теоретическими сведениями, по-видимому, большую пользу принесут вычисления: найти точные значения или выписать несколько первых значащих цифр данных степеней. Здесь мы отказываемся от формальных и утомительных выводов шести свойств степени в общем случае, ограничиваясь только наглядным и простым случаем целых неотрицательных степеней.

После темы "Степени", в качестве их применения, определяются логарифмы положительных действительных чисел. Именно, данное положительное число x записывается в виде степени ^{c} с заданным основанием $(a>0, a\neq 1)$, показатель степени a^c с и есть определяемый логарифм.

Можно надеяться, что после основательной проработки степени числа такое введение логарифмов станет более легким для восприятия.

Здесь же выводятся, на основе свойств степени, основные свойства логарифма числа.

Функции. После понятия числа, другим основным понятием математики является понятие функции, которому посвящены главы III-V.

Теоретическое содержание темы состоит в следующем.

С понятием функции учащиеся ознакомлены в предыдущих классах. Здесь напоминается определение функции с обширными комментариями. Отдельно обсуждаются составляющие понятия функции: *множество определения* и *аргумент* (или независимая переменная). И, далее, *правило*, *закон*, *алгоритм* в определении функции, обозначение $f(x)$ как результат применения правила f к элементу x.

Поясняем понятие “аргумент функции” (что тоже самое, "независимая переменная") и воздерживаемся от понятия “зависимая переменная”.

Разумеется, основными школьными функциями являются числовые функции числового аргумента. Поэтому изучаются их основные множества задания – всевозможные числовые промежутки. Здесь важно разделить понятия – определение промежутка как специального числового множества и его геометрическое изображение на координатной прямой.

Графики и преобразования трафиков. Наглядное представление функции – ее геометрическая интерпретация – дается посредством понятия графика функции, для чего требуется арифметизация плоскости – координатная плоскость.

Преобразования графиков функций сначала проводятся в модельной ситуации - для квадратичной функции, затем, на основе продемонстрированных наглядных представлений, описывается общий случай.

На основе геометрического рассмотрения определяются некоторые из свойств функций (четность, монотонность, ограниченность), обладание или нет которыми является целью исследования функции.

Основные элементарные функции. Наш подход к изложению функции основан на том факте, что определения функций, изучаемых в средней школе, носят алгоритмический характер. В частности, определения основных элементарных функций носят алгоритмический характер: выписывается вполне определенная последовательность действий, которая для данного числа x –значения аргумента функции - приводит к соответствующему значению функции.

Для определения первых трех основных элементарных функций - степенной, показательной и логарифмической, - используется подробно изученное определение степени числа. Именно, фиксируя показатель степени и беря основание в виде аргумента, получаем степенную функцию, поступая наоборот – показательную.

О логарифме числа выше уже говорили: считая записываемое в виде степени число за аргумент, получаем логарифмическую функцию.

Определение четвертой элементарной функции, точнее, *класса тригонометрических функций*, требует геометрических рассмотрений. Здесь необходимы дополнительные понятия: единичная окружность с центром в начале координат, расстояние вдоль окружности, перемещение вдоль окружности, поворот на углы в радианном и градусном измерениях.

И здесь должна четко прослеживаться процедура: как для данного действительного числа x получить числа $\cos\ x$ и $sinx$.

Далее, на геометрическом определении тригонометрических функции основано изучение их свойств и построение графика.

Отметим, что имеется необозримо большое количество различных тригонометрических тождеств. Поэтому мы выделяем четыре из них, названных нами *базовыми*, затем показываем, как из них получить другие, наиболее часто употребляемые.

Определение обратных тригонометрических функции также носит алгоритмический характер: на основе понятия обратной функции и как обратная процедура к геометрическому определению тригонометрической функции.

В связи с обратными тригонометрическими функциями, отдельно остановимся на обратной функции.

Обратные функции изложены на двух уровнях - отдельно в общем виде и отдельно как подготовка к определению функций, обратных к тригонометрическим.

Отметим, что в случае основных элементарных функций обратными к степенным являются опять же степенные функции, показательные и логарифмические функции - взаимно обратны. В продолжение этого, функции, обратные к тригонометрическим, также включены в число основных элементарных, причем названия им присваиваются добавлением приставки "арк" к названию исходной.

Заметим, что это делается не всегда. Например, уравнение $f(x) = 3$, где $f(x) = x$. $2x$ можно было бы решить, полагая решение равным $x = f^{-1}(3)$, где f^{-1} - обратная к f . Но, в отличие от случая $tgx = 3$, когда пишем $x = arctg3$ и считаем уравнение решенным, здесь f^{-1} за известную функцию не принимается.

Ввиду того, что утверждение о существовании обратной функции носит характер теоремы существования, и потому ее нахождение к эффективной процедуре не относится, а также в силу принятого нами принципа описания алгоритма вычисления значения основной элементарной функции для заданного значения аргумента, определения обратных тригонометрических функций дополнены геометрическими описаниями.

Элементарные функции. При определении функции проводится четкая линия определения сначала основных элементарных функций – их пять видов, запас которых увеличивается применением к ним в конечном числе пяти действий.

Основной набор школьных функций – элементарные функции, носят выраженный алгоритмический характер, заложенный в самой ее записи - формуле. Именно этот момент подходит красной нитью в изложении всей темы. В формуле – записи элементарной функции $f(x)$ - заложено правило как алгоритм: конечная последовательность действий над значением аргумента x , приводящая к соответствующему значению функции $f(x)$.

В формуле содержится множество определения этой функций как совокупности всех x , для которых указанные в алгоритме действия выполнимы.

Особо отметим, что к элементарным относятся функции $f(x) =| x |$, более того, всякая функция, полученная непрерывным склеиванием двух элементарных функций.

Последовательности. В теме "Последовательности" основным является само определение последовательности как функции, определенной на множестве натуральных чисел.

Здесь мы должны предостеречь от ошибочного понимания последовательности как выписанного ряда чисел, чему в немалой степени способствует запись $a_1, \dots, a_n, \dots$, последовательности.

Также полезно объяснить, что в записи a_n нижний индекс и есть аргумент, а число (или иной объект) a_n - значение функции, в этом специальном случае именуемой последовательностью. Можно еще добавить, что запись a_n экономнее записи $a(n)$ на две скобки и короче из-за нижнего индекса.

Самые простые соответствия – это, понятно, случаи, когда последующий член последовательности a_n получается сложением или умножением предыдущего на одно число.

Пусть это будут числа d и q соответственно, т. е. $a_n = a_{n-1} + d$ и $a_n = qa_{n-1}$.

Полученные последовательности называют *прогрессиями,* арифметической и геометрической соответственно.

Эти последовательности возникают во многих задачах, в частности, в финансовых: накопления за целое количество лет образуют арифметическую и геометрическую прогрессии при ежегодном начислении прибыли в простых и сложных процентах.

Особый вопрос: как ввести число e? Можно, конечно, объявить e как предел

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Следуя нашему общему принципу мотивировки вводимых понятий, мы к пределу определяющему число e, приходим в результате дробления года на равные части в упомянутой выше финансовой задаче.

Тема "Метод математической индукции" начинается с определения высказывания и примеров предложений, являющихся и не являющихся высказываниями.

Затем рассматривается последовательность высказываний и выясняется, что, в силу бесконечности высказываний, проверка каждого из них на истинность или ложность невозможна.

И, наконец, обсуждается возможность проверки истинности *всех* высказываний в конечные два этапа, что и составляет метод математической индукции.

В качестве примера применения метода доказывается формула бинома Ньютона.

Непрерывность и предел функции. Особый вопрос: как быть в школе с понятиями предела и непрерывности?

Поскольку в школьной курс введены дифференциальное и интегральное исчисления, а определения производной и интеграла есть специфический в каждом случае предельный переход, то, вроде бы, без понятия предела не обойтись.

Здесь дано следующее решение данной методической проблемы. Сначала понятия непрерывности функции на промежутке и разрыва в точке обсуждаются на графике на уровне наглядных представлений. Затем, в процессе обсуждения этих геометрических изображений дается уже строгое определение непрерывности для монотонных функций, геометрически очевидное именно для основных элементарных функций. Наглядность здесь достигается тем, что в качестве окрестности точки определяется всякий интервал, содержащий эту точку.

И, наконец, дается общее определение предела функции.

Часто бывает, что частные случаи в отдельности объяснить и понять труднее, чем систематизированный общий случай. Надеемся, что представленная нами здесь методика определения предела числовой функции числового аргумента именно такая. Вначале в виде таблицы даются две системы окрестностей – проколотые ε- окрестности и полные ε-окрестности в аналитическом виде (в виде неравенств) с соответствующей геометрической интерпретацией, каждая в логическом развитии шести видов. Затем на языке $\varepsilon - \delta$ попарно определяются все 36 случаев предела функции, включая бесконечные пределы и пределы в бесконечности.

Несмотря на устрашающее число в 36 случаев предела, все определения наглядны и носят алгоритмический характер, надо только научить выписывать их по таблице по геометрически наглядным правилам.

И здесь же дается применение этих определений для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, показывающее, как геометрически наглядные случаи предельного перехода имеют строгое аналитическое подтверждение.

Тема “Непрерывность и предел функции” изложено таким образом, что Учитель сам может выбрать глубину освещения темы, остановившись на любом этапе – от интуитивного до самого полного.

Уравнения и неравенства. Уравнение определяем как условное равенство.

Чтобы оттенить смысл этого определения, необходимо на примерах показать, что есть "верное числовое равенство" и что - "неверное числовое равенство". В расширенном варианте этой подготовки к определению уравнения выписываем все случаи употребления знака равенства, что, разумеется, имеет само по себе самостоятельное значение.

Далее обсуждаются различные случаи, приводящие к уравнениям - математическое моделирование, исследование вопроса "является ли заданное число значением данной функции" и просто приравнивание к нулю элементарных функций.

Для понимания понятия уравнения и способов решения привлекается весь теоретический школьный материал.

Методика здесь, на наш взгляд, должна быть такой. Производится классификация уравнений, по каждому из них проводится детальное обсуждение методов решения с контролем усвоения. Затем необходимо самостоятельно решить не более десятка задач, с подробным разбором каждого шага метода. И, наконец, для закрепления, научиться распознавать типы уравнений и, без обязательно подробного решения, устно излагать ход решения.

Решение ста задач без должного осмысления не гарантирует от неудачи в сто первом случае. Понятно, что сказанное относится к решению не только уравнений, но и задач вообще.

При решении уравнений привлекается весь арсенал средств и понятий: множества задания функций и их пересечения, различные преобразования и т. п. , и все на фоне четких логических рассуждений. Можем сказать, что тщательно отобранный и, по мере возможности, подробно изложенный здесь теоретический материал призван обеспечить понимание как постановки задач, так и методов их решения, а также научить строгим логическим рассуждениям, в чем, собственно, и состоит основная цель обучения математике.

Изложение темы "Уравнения" рассчитано на вариативность по профилям, от первоначальных сведений до развернутых.

В отношении неравенств, с необходимыми уточнениями, повторяется все сказанное об уравнениях.

Комбинаторика. Методика изложения темы "Комбинаторика" носит вычислительный характер: формулируется и доказывается "основное комбинаторное правило", применением которого выводятся формулы для числа размещений, перестановок и сочетаний.

Само правило для случая независимого выбора упорядоченных пар из двух групп имеет наглядное представление в виде прямоугольной таблицы и очевидным образом переносится на большее число групп - три, четыре и т. д.

Преимущество представленной методики состоит в том, что применение формул сопровождается способом их доказательств.

Теория вероятностей. Теория вероятностей изучает математические модели явлений и экспериментов, исходы которых, подчиненных воле случая, предсказать нельзя. Так подбрасывая монету или игральную кость (т. е. производя эксперимент), нельзя предсказать, какой стороной они упадут (его исход).

Итак, изучаем эксперимент с конечным числом исходов. Исходы в теории вероятностей называют *элементарными событиями*, составляющими в совокупности *пространство элементарных событий* данного эксперимента.

Событием (мы сознательно не говорим *случайным событием*) называют всякое подмножество пространства элементарных событий, от пустого до всего пространства, т. е. всякое множество, составленное из исходов данного эксперимента.

В представленном здесь способе введения в данную тему мы избегали слова "случайность", более склоняясь к пониманию вероятности события как "исчисления шансов" того или иного одного исхода эксперимента или явления, или же составленных из них наборов (множеств).

Для этого в качестве вспомогательной модели привлекаем описание обычного торгового киоска, где есть товары (элементарные события), где каждый товар имеет цену (вероятность элементарного события), покупая товары, мы их складываем в пакет (событие), цена которого (вероятность события) есть сумма цен товаров, составляющих этот пакет (вероятность события есть сумма вероятностей всех элементарных событий, составляющих это событие).

Стандартными моделями эксперимента является одно- и двукратное подбрасывание монеты и бросание игральной кости, которые подробно описаны.

В понимании теории вероятности важны два момента.

Во-первых, пусть зафиксировано какое-либо событие. Произвели эксперимент, известен его исход. Что означает "в результате эксперимента данное событие произошло" и что означает "в результате эксперимента данное событие не произошло"?

Ответ такой: если данный исход данной реализации эксперимента как элементарное событие есть элемент данного события, то говорят, что произошло *все событие*, причем, разумеется, другие элементарные события из данного события в этот раз произойти не могут.

В этом суть теории вероятностей: результатом эксперимента является одно элементарное событие, знаем все возможные исходы, но не знаем, какой из них при данной реализации эксперимента произойдет. Событие состоит из элементарных событий, каждое элементарное событие, составляющее данное событие, увеличивает шанс произойти событию, вычисление вероятности события и есть исчисление этих шансов.

Если же данный исход не есть элемент данного события, то говорят, что не произошло *все событие.*

Этот момент очень важен для понимания теории вероятностей, и, как нам кажется, ему не уделяется должного внимания в учебной литературе.

Во-вторых, дано событие, знаем его вероятность. Что дает нам это знание?

Ответ такой: повторяем эксперимент какое-то количество раз и следим за тем, сколько раз данное событие произошло. Тогда отношение числа появлений события к числу проведенных экспериментов близко к вероятности данного события, причем близость увеличивается с увеличением числа экспериментов.

В этом и состоит содержание *закона больших чисел.*

Тем самым, об исходе каждого эксперимента ничего сказать не можем, но можем указать долю события в большом количестве экспериментов.

Цель заключается в объяснении этих двух фундаментальных положений теории вероятностей.

Еще раз повторяем: событие состоит из элементарных событий, каждое из которых является шансом для реализации всего события, реализация одного из шансов – одного элементарного события - обеспечивает выполнение всего события, а остальные можно понимать как еще не реализованные шансы.

По определению, да и на практике тоже (например, случай изогнутой монеты), вероятность элементарного события может быть любым неотрицательным числом. Требуется лишь, чтобы сумма вероятностей всех элементарных событий была равна единице (это называется нормировкой). Поэтому, несмотря на определенную громоздкость, для правильного формирования начальных представлений, сначала приводятся примеры, в которых вероятности элементарных событий устанавливаются произвольно.

Особым является случай *равновозможных элементарных событий*, когда вероятности всех элементарных событий совпадают и равны дроби, числитель которой равен единице, а знаменатель – количеству всех элементарных событий.

Тогда вероятность события равна отношению числа элементарных событий, составляющих данное событие, к числу всех элементарных событий. Часто это сводится к комбинаторным задачам, формулы для решения которых уже выведены.

Вероятностные задачи формулируются на обычном разговорном языке, так же, как и задачи на смеси, проценты, бассейны. Но если при решении последних составляются уравнения, то в вероятностных задачах составляются вероятностные пространства, состоящие из троек (Ω , F, P), где Ω - пространство элементарных событий, F - совокупность всевозможных подмножеств Ω , т. е. событий, и вероятностей событий P - числовой функции, определенной на F.

При этом случай равновозможных событий выделяется словами "наугад", "случайно", "произвольно" и т. п.

После выяснения основных понятий события и вероятности переходим к их более детальному изучению.

По определению, событие есть множество, поэтому применение к событиям теоретико-множественных действий объединения, пересечения и разности приводит к новым множествам – событиям.

Можно сказать, что предметом теории вероятностей является исчисление вероятностей сложных событий, образованных из исходных, в заданных условиях, событий.

Первым в этом ряде является понятие *условной вероятности*, являющейся фактически пересчетом вероятности при замене основного пространства элементарных событий на ее подмножество, называемого *условием.*

В свою очередь, понятие условной вероятности влечет понятие независимости событий – одного из основных понятий теории вероятностей.

Связанные с понятием несовместности и независимости событий равенства между вероятностями мы выделим в соответственно аддитивное (сложения) и мультипликативное (произведения) свойства вероятностей.

И, наконец, выводим основные теоремы теории вероятностей – формулы умножения, полной вероятности и Байеса.

Эти формулы технически легко доказываются (нужно только следить за смыслом производимых выкладок), но имеют богатое содержание, о чем свидетельствует большое разнообразие вероятностных задач, применением которых они решаются.

Следующим важным понятием теории вероятностей является понятие случайной величины, возникающее в результате применения теории вероятностей к изучению реальных процессов.

Обращаем внимание на важный факт: случайная величина есть обычная числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω.

Изучается характеристики случайной величины: распределение вероятностей, математическое ожидание и дисперсия.

Здесь опять же следуем идее обязательной мотивировки вводимых понятий.

Определению математического ожидания случайной величины предшествует мотивированное определение среднего значения конечного набора чисел, на основе которого, с использованием вероятностных рассмотрений, вводится и само понятие математического ожидания.

Дисперсия как характеристика разброса значений случайной величины относительного среднего ее значений – математического ожидания - требует обсуждения, что и проведено в учебнике.

Математическая статистика. Математическую статистику можно понимать как способ определения параметров вероятностных пространств, которые описывают изучаемое явление, с последующим применением вероятностной теории.

Так, например, каждая монета имеет свою вероятность выпадения герба и решки, определение которой есть предмет изучения математической статистики.

Содержание темы "Математическая статистика" согласовано с содержанием темы "Теория вероятностей" и заключается в описании методов опытного определения вероятности события, распределения, математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Здесь в качестве примера для определения вероятности взята вероятность рождения ребенка определенного пола как удивительный феномен человеческой природы и как яркая демонстрация статистической устойчивости частот.

Изложение отдельных характеристик производится на фоне обычной предметной контрольной работы.

Можно ожидать, что проведенное обсуждение организации испытания повысит качество контрольных заданий.

Вообще, введение элементов теории вероятностей и математической статистики является новым для среднего образования в РК.

Здесь предпринята попытка на доступном уровне объяснить основные идеи этой обширной и постоянно расширяющейся области своих приложений теории.

Наш подход изложения начал математического анализа

При изложении тем дифференциального и интегрального исчислений мы придерживались позиции каких-либо сложных доказательств не проводить, ограничиваясь лишь *правдоподобными рассуждениями.*

Все строгие доказательства основаны на свойстве полноты множества действительных чисел, изложение которого в рамках школьного курса невозможно.

Более того, всякие отрывочные теоретические сведения о математическом анализе, полученные в средней школе, могут быть источником неверных представлений, и в дальнейшем - преградой для успешного усвоения математического анализа в высшей школе.

Поэтому наше изложение направлено на демонстрацию приложений дифференциального и интегрального исчислений как в самой математике, так и в других смежных науках и на развитие навыков обращения с аппаратом дифференциального и интегрального исчислений в части, носящей алгоритмический характер: вычисление производной и интеграла Римана элементарных функций и исследование функций на монотонность и локальный экстремум.

Таким образом, на наш взгляд, минимум теоретических сведений и достаточно полный набор практических навыков в средней школе без каких либо осложнений обеспечит переход к усвоению продвинутых курсов математического анализа в высшей школе.

Производная. Теперь перейдем к деталям. Определению производной предшествует рассмотрение двух задач – что есть касательная и как написать ее уравнение, и что есть скорость в момент времени и как ее вычислить.

При этом сначала рассматриваем производную в модельном случае, когда функция есть основная школьная – квадратичная, затем обсуждаем общий случай.

В результате оказывается, что две разные задачи, из геометрии и из физики, приводят к одному математическому понятию – понятию производной.

Хотя мы и даем понятие предела, причем в широком диапазоне - от интуитивного до полного из 36 предложений, но в определении производной ограничиваемся лишь интуитивными представлениями о пределе.

Методика вычисления производных дифференцируемых элементарных функций. Вычисление производных основных элементарных функций, т. е. раскрытие соответствующих неопределенностей, на наш взгляд, тема не для школьного курса математики.

Лишь производную степенных функций с целыми положительными показателями можно вычислить, и то с объяснением, почему в разностном отношении для производной, после сокращения не равного нулю приращения, для получения предельного значения, достаточно приращение положить равным нулю.

Вычисление же производных степенной функции с нецелым показателем, показательной и логарифмической функций являет собой сложное теоретическое исследование, соединенное со специальной вычислительной техникой, т. е. *анализ посредством бесконечно малых* в полном объеме этого названия математического анализа.

Поэтому мы ограничиваемся вычислением производной линейной и квадратичной функций, а таблицу производных основных элементарных функций выписываем в полном объеме и рекомендуем выучить, точно так же, как и таблицу умножения.

Затем переходим к вычислению производных дифференцируемых элементарных функций.

Здесь мы исходим из того положения, что вычисление производных дифференцируемых элементарных функций носит алгоритмический характер и, тем самым, является доступным, попутно развивая вычислительные навыки, наряду, например, с тождественными преобразованиями.

Мы считаем, что в силу алгоритмического характера вычисления производных дифференцируемых элементарных функций, его усвоение существенно более легкое, нежели традиционные задачи на решение уравнений и неравенств, составление уравнений, решение стереометрических задач.

Однако здесь нужно строго придерживаться определенной методики. Именно, имеются пять правил дифференцирования. Они следующие: представление производной сложной функции по производным составляющих ее функций и производных суммы, разности, произведения и частного двух функций через исходные функции и их производные.

Наша методика заключается в следующем: сначала переписывается таблица производных основных элементарных функций на случай сложной функции, когда внешняя – основная элементарная, а внутренняя – произвольная дифференцируемая, и это все как приобретение первых навыков вычисления производной. Затем (и это считаем очень важным), как продолжение таблицы - вычисление производных элементарных функций, полученных двумя, тремя и т. д. применениями правила образования сложных функций, двукратным, трехкратным и т. д. применением равенств из таблицы - и только!

Только после достаточно уверенного вычисления производных сложных функций переходим к оставшимся случаям элементарных функций, полученных применением в конечном числе четырех арифметических действий к сложным функциям, и что, думается, вполне доступно.

Неопределенность и методы раскрытия неопределенности. Неопределенности в теории пределов возникают как случаи, не подпадающие под общие теоремы о пределах. Здесь на примерах объясняется неопределенность вида $\frac{0}{0}$ и смысл "раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ ".

Вычисление производных основных элементарных функций эквивалентно вычислению так называемых "замечательных пределов", по сути являющихся раскрытием неопределенности $\frac{0}{0}$, которые нами и выписываются.

И, в завершение темы даны, три способа раскрытия неопределенностей (два вида $\frac{0}{0}$ и один - 1^{∞}), применение которых можно отнести к еще одному случаю тождественных преобразований.

Применения производной. Применения производной основываются на двух теоремах - теореме Лагранжа и теореме Ферма, обоснование которых - "геометрическое на правдоподобном уровне".

Теорема Лагранжа является теоремой существования, затруднительной для восприятия, поэтому требует подробного разъяснения. Здесь необходимы пояснения смысла теорем типа "*теорем существования*", что производится одновременно с демонстрацией эффективного применения - установления признаков (достаточных условий) монотонности функции на промежутке путем определения знака ее производной на этом промежутке. Отметим также, что эти теоремы доказываются в несколько строк очевидным образом.

Следующее явное применение дифференциального исчисления - исследование функций на экстремум, где, в сочетании с признаками монотонности функций, все рассуждения проводятся на основе наглядных геометрических представлений.

Полученные результаты применяются к главной цели исследования - нахождению наибольших и наименьших значений на промежутке - задаче, имеющей многочисленные практические применения.

Вторая производная в физике имеет смысл скорости изменения скорости, т. е. ускорения, поэтому входит в число обязательных понятий, но дальнейшие исследования функций с помощью второй и выше производных относятся, по-видимому, к разряду "на усмотрение Учителя".

Здесь с помощью второй производной даны признаки выпуклости функции на промежутке и точки перегиба.

И, конечно, тема завершается применением аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и построению эскизов графиков функций.

Исследование функций составляет одну из основных задач школьной математики, в разных видах заполняющих весь курс обучения.

В качестве демонстрационного примера проведено полное исследование квадратичной функции.

Исследование заключается в следующем. Квадратичная функция задается посредством трех чисел - коэффициентов при степенях аргумента, включая степень с нулевым показателем.

Установление зависимости между свойствами и характерными точками графика функции и этими тремя определяющими квадратичную функцию числами и их соотношениями между собой составляет предмет исследования.

Первообразная и интеграл Римана. В задаче нахождения первообразной мы ограничиваемся простейшими случаями, получающимися по определению из таблицы производных. При этом считаем, что методы интегрирования по частям и замены переменных все же не для школьной программы.

Интеграл Римана вместе с формулой Ньютона-Лейбница изложен на правдоподобном уровне.

В заключение даются геометрические и физические приложения дифференциального и интегрального исчислений.

Заключение. Этим завершим аналитический обзор учебника - в чем состоит наш замысел, какие моменты мы считаем важными для усвоения.

Еще раз подчеркнем, что мы старались выделить итоговый школьный материал в рамках общепринятой программы, *но со строгим отбором минимально необходимого* в заключительные два года обучения, нацеленного на творческое усвоение материала, формирование логического мышления и развитие технических навыков в решении различных задач.

Быть может, отдельные темы и методы потребуют дальнейшего усвоения и осмысления и от Учителей.

Данный учебник является пробным, мы с интересом и благодарностью примем любые предложения и замечания, конструктивную критику.

***

Здесь была дана Заключительная часть школьной программы – это X-XI классы, с гарантией, что усвоивший может успешно учиться в любом университете мира.

Завершим Школьную программу описанием ИТМиНВ-предложения распространения X-XI-методологии на I-IX классы.

Реализация Проекта №5. Казахстан делится на пять регионов, - С, В, З, Ю и Центр, в каждом из которых на конкурсной основе осуществляется отбор учителей для формирования групп по проведению экспериментов с учениками из 5-10 школ каждого района с целью выявления степени усвоения школьного авторского материала по различным возрастным уровням.

Эксперимент состоит в 45-минутных лекциях по каждой из школьных тем, исполненных по прямым методам ИТМиНВ, для соответствующих возрастных групп учащихся с последующей проверкой усвоения в процентных соотношениях (и в иных показателях).

Второй этап - вся информация со всех пяти регионов на уровне всех районов каждого региона собирается в ИТМиНВ и осуществляется статистическая обработка полученного материала специально разработанными в ИТМиНВ методами, на основе результатов исследований формируется единая Программа по всем классам. Третий этап - формируются команды учителей для написания школьных учебников по математике. При этом учебники пишутся под постоянным контролем ИТМиНВ. Затем сигнальные варианты учебников опять передаются учителям всех регионов, ранее участвовавшим в эксперименте для апробации. С учетом замечаний осуществляется завершающий этап по написанию учебников, которые в виде сигнальных экземпляров передаются в МОН РК (не позднее декабря 2020 года).

В самом ИТМиНВ формируются специальные тематические команды по осуществлению следующих этапов работы:

1) разработка методических материалов для проведения экспериментов по всем темам школьной программы на основе материалов прямого применения ИТМиНВ,

2) разработка статистических методов обработки результатов экспериментов, проводимых в 5-10 школах каждого из 160 районов РК, в зависимости от общего количества школ в районе,

3) разработка школьного математического казахского языка и соответствующей терминологии,

4) сравнительный анализ с зарубежными аналогами школьных учебников,

5) методические разработки для учителей по авторским учебникам.

* * *

Заключение. Приведенные выше материалы прямого применения по науке и образованию в Проектах №1, №2 и №5 полностью обеспечивают наполнение Серии журнала международно значимыми статьями отечественных авторов, остальные из 17-ти Проектов Комплексной программы, частично здесь выписанные, имеют организационный характер для реализации этих возможностей.

Список литературы

1 Темиргалиев Н. О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье // Матем. заметки - 1972. -Т. 12, №2, С. 139-148.

2 Темиргалиев Н. Об одной теореме вложения //Изв. высш. учеб. завед. Математика - 1973. №7, С. 103-111.

3 Темиргалиев Н. Об условиях принадлежности высших производных классам φ (L)// Матем. заметки -1973. -Т. 14. №4. -С. 479-486.

4 Темиргалиев Н. Ульянов П. Л. Об интегральном модуле непрерывности //Acta Scientiarum Mathematicarum -1974. -Т. 36. №. 1-2. -С. 173-180.

5 Темиргалиев Н. О вложении некоторых классов функций //Матем. заметки -1976. -Т. 20. №6. -С. 835-841.

6 Темиргалиев Н. О вложении некоторых классов функций в С($[0,2\pi]^m$) //Изв. высш. учеб. завед. Математика -1978. -Т. 20. № 8. -С. 88-90.

7 Темиргалиев Н. О вложении в некоторые пространства Лоренца //Изв. высш. учеб. завед. Математика - 1980. №6. -С. 83-85.

8 Темиргалиев Н. О вложении классов H_p^ω в пространства Лоренца //Сиб. матем. журнал - 1983. -Т. XXIV. №2. -С. 160-172.

9 Воронин С. М. , Темиргалиев Н. Об одном приложении меры Банаха к квадратурным формулам //Матем. заметки - 1986. -Т. 39. №1. -С. 52-59.

10 Temirgaliev N. On an application of infinitely divisible distributions to qudrature problems //Analysis Mathematica -1988. Vol. 14. №3. -P. 253-258.

11 Воронин С. М. , Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел //Матем. заметки - 1989. -Т. 46. №2. -С. 34-41

12 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к приближенным восстановлению и интегрированию периодических функций многих переменных //Докл. АН СССР -1990. -Т. 310. №5. -С. 1050-1054.

13 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. - 1990. -Т. 281. №4. -С. 490-505.

14 Темиргалиев Н. Средние квадратические погрешности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях // Изв. высш. учеб. завед. Математика - 1990. №8. -С. 90-93.

15 Темиргалиев Н. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях //Матем. заметки - 1997. №2. -С. 297-301.

16 Темиргалиев Н. О построении вероятностных мер на функциональных классах //Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова РАН - 1997. -Т. 218. -С. 397-402.

17 Темиргалиев Н. Классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы //Докл. РАН. - 2003. -Т. 393. №5. -С. 605-608.

18 Ажгалиев Ш.О., Темиргалиев Н. Об информативной мощности линейных функционалов // Матем. заметки -2003. -Т. 3. №. 6. -С. 803-812.

19 Баилов Е.А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений уравнения Пуассона //Журнал вычислительной математики и математической физики -2006. -Т. 46. №9. -С. 1594-1604.

20 Сулейменов К.М., Темиргалиев Н. О вложении классов $H_{\alpha,p}^\omega$ в пространства Лоренца //AnalysisMathematica -2006, 32. -С. 283-317.

21 Ажгалиев Ш. У., Темиргалиев Н. Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω //Матем. сб. -2007ю -Т. 198. №11. -С. 3-20.

22 Баилов Е.А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН - 2007. -Т. 416. №2. -С. 169-173.

23 Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н. Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ //Дифференциальные уравнения -2008. -Т. 44. № 4. -С. 491-506.

24 Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж. Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики - 2009. -Т. 49. №1. -С. 14-25.

25 Темиргалиев Н., Кудайбергенов С.С., Шоманова А.А. Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования //Изв. РАН, сер. матем. -2009. -Т. 73. №2. -С. 183-224.

26 Наурызбаев Н.Ж., Темиргалиев Н. О порядке дискрепанса сетки Смоляка //Матем. заметки -2009. -Т. 85. № 6. -С. 947-950.

27 Темиргалиев Н. Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл. РАН - 2010. Т. 430. № 4. -С. 460-465.

28 Темиргалиев Н. , Кудайбергенов С. С. , Шоманова А. А. Применения квадратурных формул Смоляка к численному интегрированию коэффициентов Фурье и в задачах восстановления // ИзвВУЗов. Математика -2010. №3. -С. 52-71.

29 Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н. О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифф. уравн. -2010. -Т. 46. № 8. -С. 1201-1204.

30 Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет. -2010. -Т. 87. №6. -С. 948-950.

31 Абикенова Ш.К., Утесов А., Темиргалиев Н. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. заметки - 2012. -Т. 91. № 3. -С. 459-463.

32 Nauryzbayev N., Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration // Found Comput Math -2012. -12. -С. 139-172.

33 Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е., Берикханова М.Е. Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна-Гордона по коэффициентам Фурье // Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М. : МИАН - 2013. Вып. 17: Математика и информатика, 2. К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы/ С. 179–207.

34 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. ВУЗов. Математика - 2013. №8. -С. 86-93.

35 Баилов Е.А., Сихов М.Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физики - 2014. -Т. 54. № 7. -С. 1059-1077.

36 Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумахаева Г.Т. Критерии вложения классов типа Морри // Изв. вузов. Матем. -2015. № 5. -С. 80-85.

37 Темиргалиев Н., Наурызбаев Н.Ж., Шоманова А.А. Аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов "Типа Смоляка" с ядрами Дирихле, Фейера и Валле-Пуссена в шкале классов Ульянова // Известия вузов. Математика - 2015. №7. -С. 75–81.

38 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева// Журнал вычислительной математики и математической физики -2015. -Т. 55. № 9. -С. 1474–1485.

39 Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. Быстрые "Алгебраические" преобразования Фурье на равномерно распределенных сетках// Изв. вузов. Матем. - 2016. № 5. -С. 93-98.

40 Темиргалиева Ж.Н., Темиргалиев Н. "Геометрия чисел" в контексте алгебраической теории чисел// Изв. вузов. Матем. - 2016. № 10. -С. 92-97.

41 Темиргалиев Н., Жайнибекова М.А., Джумахаева Г.Т. Критерий вложения анизотропных классов Соболева-Морри в пространство равномерно непрерывных функций// Сиб. мат. журнал -2016. -Т. 57. №5. -С. 1156–1170.

42 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения// Изв. вузов. Матем. - 2017. №3. -С. 89–95.

43 Темиргалиев Н., Наурызбаев Н.Ж., Шоманова А.А. О некоторых особых эффектах в теории численного интегрирования и восстановления функций// Изв. вузов. Матем. - 2018. №3. -С. 96–102.

44 Сихов М.Б. О прямых и обратных теоремах теории приближений с заданной мажорантой // Analysis Mathematica - 2004. -V. 30. № 2. -P. 137-146.

45 Алшынбаева Е. О преобразованиях коэффициентов Фурье некоторых классов функций// Матем. заметки -1979. -Т. 25. №5. -С. 645-651.

46 Алшынбаева Е. О преобразованиях коэффициентов Фурье некоторых классов функций // Докл. АН СССР - 1977. -Т. 236. № 6. -С. 1293-1295.

47 Джумакаева Г.Т. Критерий вложения класса Соболева-Морри $W^l_{p,\Phi}$ в пространство C // Матем. заметки -1985. -Т. 37. №3. -С. 399-406.

48 Нурмолдин Е. Е. Восстановление функций, интегралов и решений уравнения теплопроводности из U2-классов Ульянова// Сиб. журн. вычисл. матем. -2005. -Т. 8. №4. -С. 337-351.

49 Ковалева И. М. Восстановление и интегрирование функций из анизотропного класса Коробова// Сиб. журн. вычисл. матем. -2002. -Т. 5. №3. -С. 255-266.

50 Ажгалиев Ш. У. О дискретизации решений уравнения теплопроводности// Матем. заметки. -2007. -Т. 82. №. 2. -С. 177-182.
51 Кудайбергенов С. С. , Сабитова С. Г. О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова// Журнал вычислительной математики и математической физики -2013. -Т. 53. № 7. -С. 1082–1093.
52 Сихов М. Б. О вложении и аппроксимативных свойствах классов функций с доминирующей смешанной разностью// Изв. вузов. Матем. , 2009, № 8, 83-86.
53 Сихов М. Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона–Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле // Матем. заметки, 80:1, 2006, 95-104.
54 Сихов М. Б. Неравенства типа Бернштейна, Джексона–Никольского и их приложения // Изв. вузов. Матем. , 2002, № 8, 57-64.
55 Сихов М. Б. О вложении $E_p(\lambda) \subset H_C^{\omega_k}$ // Изв. вузов. Матем. , 1990, № 7, 61-65.
56 Сихов М. Б. О некоторых теоремах вложения. Изв. вузов. Матем. , 1988, № 9, 83-85.
57 Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж.Н. Полное спектральное тестирование по методу Ковэю-Макферсона генераторов случайных чисел Лехмера с максимальным периодом // Вест. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева, 2016. №2 (111), стр. 61-83
58 Temirgaliyeva Zh.N., Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607. 00950 [math. NA].
59 Temirgaliyev N. Are mark about Galerkin method // arXiv:1705. 06880 [math. NA].
60 Темиргалиев Н. О некоторых многомерных теоремах вложения и о производных из классов $\varphi(L)$, Автореферат кандидатской диссертации, Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР, 1973, Москва.
61 Темиргалиев Н. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования и восстановления функций многих переменных, Автореферат докторской диссертации, Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР, 1991, Москва.
62 Темиргалиев Н. Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье//Вестник Евразийского университета - 1997. № 3. -С. 90-144.
63 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вест. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л. Н. Гумилева - 2010. -С. 1-194
64 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. ИТМиНВ. Астана - 2012. -С. 1-259.
65 Темиргалиев Н. Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований // Электронное издание. Институт теоретической математики и научных вычислений. Астана (постоянно дополняемый по новым результатам и соответственно по новым и уточняемым постановкам задач). Астана -2018.
66 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. I. -Алматы: Мектеп, 1987, 288 бет.
67 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. II. -Алматы: Ана тілі, 1991, 400 бет.
68 Темірғалиев Н. Математикалық анализ. Т. III. -Алматы: Білім, 1997, 432 бет.
69 Темиргалиев Н. Математикалық анализ (өңделген және толықтырылған екінші басылым), 2018, 1600 бет.
70 Темиргалиев Н. Действительный анализ: мера и интеграл. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.
71 Темиргалиев Н. Теория вероятностей. Электронное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012.
72 Темірғалиев Н. Әубакір Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра және анализ бастамалары, X-XI кластар, "Жазушы", 2002, 382 бет.
73 Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, для X-XI классов, "Жазушы", 2002, 423 стр.

Н. Темірғалиев

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Астана, Қазақстан

"Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің хабаршысы. Математика. Информатика. Механика сериясы" журналының басты мақсаттары мен оларды жүзеге асыру жолдары жөнінде Бас редактордың алғысөзі

Аннотация: Мақалада "Қазақстан түпкілікті базалық дайындық арқылы математика-информатика саласында алдыңғы қатарлы есептерін шешуге қауқарлы және мәнді нәтижелер ала алатын жоғары білікті математика және IT-мамандарын жаппай даярлау ісіне бағыт алуда" бағдарламасы негізінде Қазақстанның 4-ші өнеркәсіптік революцияға енуін қамтамасыз ететін журнал сериясының ғылыми саясаты анықталған.

Серияның ғылыми саясатын жүзеге асыратын авторлық ТМжҒЕИ жолы әзірленді. Әуелі «*Сұрақ-Жауап*» түрінде мектеп математикасының Қорытынды бағдарламасы құрылды, оны

толық меңгерген білім алушы әлемнің кез келген университетінде еш қиындықсыз табысты әрі нәтижелі оқи алады. Келесі кезекте «*Математикалық анализ*» тұр, оны меңгеру арқылы «*математикалық есею*» қалыптастырылады да, тағы да авторлық «*Лебег өлшемі және интегралы*» мен «*Ықтималдықтар теориясы*» оқулықтарымен жалғастырылады. Осы авторлық ТМжҒЕИ білім жолын өтуші халықаралық математика-информатика бойынша алдыңғы қатарлы ғылыммен айналысуды қамтамасыз ететін 20 авторлық бағыттар мен тақырыптар бойынша ғылыми-зерттеу жұмыстарын орындауға 70 пайыз және одан жоғары көрсеткішпен дайын болады.

Математика жүйеленген ғылым, сол себепті, бірінші сыныптан бастап соңғы сыныптарды қамтитын мектеп бағдарламасы толық меңгерілуі үшін оқу материалы «*әрбір ой келесі ойға негіз*» тәртібі бойынша тұтас байланысты ағын іспетті өтілуі тиіс, осының барлығы жоғары математиканың бағдарламасына да ауысады. Тұтас алғанда мектеп және ЖОО бағдарламалары білім алушының «математикалық есеюін» қамтамасыз етуі қажет.

Әдетте мектеп және ЖОО математикасының мақсаты әртүрлі есептерлі шығара білу деп қабылданады. Бұнда ТМжҒЕИ ұстанымы мүлде басқаша. Негізгі мақсат математикалық есею түрінде математикалық әлемге ену. Ал есеп шығару мәселесі сол есептерді шығару жол әдістемелері бойынша топ-топқа бөліп, әуелі соларға жеке-жеке үйретіп, сонан соң берілген тапсырмаларды қай әдістемемен шығарылатынын танығ және сол жолмен толық шешімін беру. Осы талаптардың барлығын толығымен авторлық ТМжҒЕИ оқулықтары қамтамасыз етеді. Бұлар: Білім және ғылым министрлігінің 2000 жылғы «*Авторлық ұжым – Баспа*» форматындағы «*X-XI сыныптар үшін Алгебра және анализ бастамалары*» конкурсының жеңімпазы ретінде жарық көрген «*Алгебра және анализ бастамалары*» оқулығы және де 1978 жылғы ҚазССР Жоғарғы білім министрлігінің математика бойынша Оқу-әдістемелік кеңесінің шешімімен шығарылған 70 баспа табақты «*Математикалық анализ*» фундаменталды курсы мен оның 2018 жылғы екінші басылымы.

Бұл жерде, белгілі бір ғылым саласын алғаш түсінік беру әртүрлі әдістемелік ұстанымды бірнеше оқулық арқылы қатар жүзеге асырудың тиімділігі төмен екендігіне назар аударғанымыз жөн (мәселен, сондай жағдайда А. В. Погорелов пен Л. С. Атанасян авторлығындағы «Геометрия» оқулықтары). Істің мәні мынада: егер сезінуі мен түсінігі өзіндік бүтін бір автордың (немесе авторлар ұжымының) оқулығын алып қарайтын болсақ, сол пәнді оқытуды басқа әртүрлі көзқарастармен араластыру білім алушының санасына бейберекетсіздік әкеледі. Сонымен қатар, сол пәнді әуелі бір фундаменталды оқулық арқылы толық өтіп шығып, содан соң басқа кітаптармен үстіртін қарап шығу «*Бұл тақырыпты бұлай да баяндауға болады екен*» деген мағынада әлдеқайда нәтижелі болатыны анық. Жалпы алғанда, *қиындықтардың сақталу принципін* де есте ұстау керек «*Бір тақырыпты мазмұндауды ұтымды ету басқа бір тақырыпты мазмұндағанда қиыншылықтарға әкеледі*».

Әрі қарай, «Сұрақ-жауап» түрінде келтірілген аталмыш оқулықтардың Мазмұны бір мезгілде қажетті және жеткілікті толық тізімін береді, –олар әрі ықшам түрде, әрі егжей-тегжей жүйелі түрде беріліп, жеке тұлғаны «математикалық жетілумен» қаруландыру үшін қажет талаптарды толық қамтиды, сол арқылы қолжетімділігін айқындайды. Әрі қарай математика әдіс және өнегелі ғылым ретінде қаншалықты тиімді және маңызды болса, соғұрлым қилы-қилы келешек өмірінің барлық белестерінде қайтарылыды. Ең соңында, ТМжҒЕИ 20 бағыты мен тақырыптры бойынша ғылыми ізденістер және басқа да сапалы отандық зерттеулер журнал Сериясын халықаралық деңгейдегі мақалалармен қамтамасыз етеді деген үміттеміз.

Қазіргі заманғы Қазақстандағы математика мен информатиканың дамуы осылай көрінеді. Әрбір ел өзінің ғылымын өзі реттей жатар.

Түйін сөздер: математика-информатика, механика, 4-ші өнеркәсіптік революция, Цифрлық Қазақстан, Комплексті бағдарлама.

N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

Introdaction of the Editor-in-Chief of the Journal "The bulletin of the L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer science. Mechanics series" about the issue purposes and the ways of its implementation

Abstract: The scientific policy of the journal series as ensuring the entry of Kazakhstan into the 4th industrial revolution in the form of the Program "Kazakhstan enters the mass production of IT specialists of the highest qualification with thorough basic training and experience in solving problems at the forefront of mathematics and computer science with significant results" is defined in the article.

The author's ITMSC is defined as the way of fulfilling the scientific policy of the Series. The final program of school mathematics is given in full in the "Question-Answer" format and student who has mastered this program can successfully study at any university in the world, with the transition to "Mathematical Analysis" , the assimilation of which will ensure "mathematical maturity" with subsequent comprehension of the author's "Measure and Lebesgue Integral" and "Probability Theory", which together will determine readiness for scientific work on 20 author's directions and subjects with 70 percent or more head start, guaranteed removing at the most advanced positions in international mathematics-computer science.

Mathematics is a systematic science, therefore the teaching material for its mastering from the full school curriculum from the first to the last classes should constitute a single interconnected course according to the principle "every thought is the basis of the next", with the transition to the program material of the higher school.

In general, school and university programs should ensure the formation of " mathematical maturity", in which the solution of problems occupies its specific sphere, when a meaningful entry into a peculiar world of mathematics supports the task material in the form of various special techniques and methods.

And all these requirements fully provide the author's textbooks ITMSC. It is a school textbook, created as the winners of the MES RK Competition 2000, titled "The Algebra and the Beginning of Analysis for the X-XI Classes" in the "Author's Team - Publisher" format and the fundamental course "Mathematical analysis" in 70 printed sheets, which was created by the decision of the Scientific and Methodological Council for Mathematics of the Ministry of Higher Education of the KazSSR of 1978, with the second edition in 2018.

Here, apparently, it is worth drawing attention to the low effectiveness of teaching one formative understanding of a particular field of science by the simultaneous implementation of several textbooks with various methodological guidelines (such as Geometry by A. V. Pogorelov and L. S. Atanasyan).

The fact is that if it is a textbook of the author(group of authors) with a whole understanding and vision of science, then the confusion of different approaches to the coverage of discipline will cause chaos in the mind of the learner.

While a complete course on one fundamental textbook with a cursory glance at other textbooks will be useful in the sense of "It turns out that this topic can be expressed and so". In general, you should always keep in mind the principle of preserving difficulties, when on a large space of the discipline presentation "Winning in one topic entails a loss in another".

Further, the contents presented in the text in the "Question-Answer" form gives a complete list of necessary and sufficient material at the same time in a minimal and detailed systematic presentation, which we think will be very useful as a well-defined, thus, the realistically achievable line, required for arming the person with "mathematical maturity" with the subsequent impact in all the rehearsals of one's own life as much as effective and meaningful mathematics as a method and as a moral science.

And, finally, it is hoped that scientific searches in 20 directions and topics of ITMSC, along with other high-quality domestic research will fully provide the Series of the journal with publications of international level. This is the development of mathematics and informatics in modern Kazakhstan without any claims for export - each country will deal with its own science itself.

Keywords: mathematics and computer science, mechanics, the fourth Industrial Revolution, Digital Kazakhstan, Integrated Programme ITMSC.

References

1 Temirgaliev N. A connection between inclusion theorems and the uniform convergence of multiple Fourier series, Mat. zametki, **12**(2), 518-523 (1972).

2 Temirgaliev N. Ob odnoj teoreme vlozhenija[On a theorem of embedding], Izv. vyssh. ucheb. zaved. Matematika [IzvestiyaVuz. Matematika], (7), 103-111(1973).

3 Temirgaliev N. Conditions under which hinder derivatives belong to the classes $\varphi(L)$, Mat. zametki, 14(4), 832-836(1973).
4 Temirgaliev N. , Ul'yanov P. L. Ob integral'nom module nepreryvnosti[About the integral modulus of continuity], Acta Scientiarum Mathematicarum, **36**(1-2), 173-180(1974).
5 Temirgaliev N. The inclusion of certain classes of functions, Mat. zametki, **20**(6), 1026-1030(1976).
6 Temirgaliev N. On embedding classes of function into C([0, 1]m), IzvestiyaVuz. Matematika, **22**(8), 69-71(1978).
7 Temirgaliev N. On embedding into some Lorentz spaces, IzvestiyaVuz. Matematika, **24**(6), 101-103(1980).
8 Temirgaliev N. Embeddings of the classes H_p^ω in Lorentz spaces, Sibirskii matematicheskii zhurnal, 24(2), 287-298(1983).
9 Voronin S. M. , Temirgaliev N. Application of Banach measure to quadrature formulas, Mat. zametki, 39(1), 30-34(1986).
10 Temirgaliev N. On an application of infinitely divisible distributions to qudrature problems, Analysis Mathematica, **14**(3), 253-258 (1988).
11 Voronin S. M. , Temirgaliev N. Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers, Mat. zametki, **46**(2), 597-602 (1989).
12 Temirgaliev N. Primenenie teorii divizorov k priblizhennym vosstanovleniju i integrirovaniju periodicheskih funkcij mnogih peremennyh[Application of divisor theory to recovery and numerical integration of periodic functions of several variables], Dokl. AN SSSR[Dockland Mathematics], **310**(5), 1050-1054(1990).
13 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik, **69**(2), 527-542(1990).
14 Temirgaliev N. Srednie kvadraticheskie pogreshnosti algoritmov chislennogo integrirovanija, svjazannyh s teoriej divizorov v krugovyh poljah [Mean square errors of numerical integration algorithms associated with the theory of divisors in circular fields], Izv. vyssh. ucheb. zaved. Matematika [IzvestiyaVuz. Matematika], (8), 90-93(1990).
15 Temirgaliev N. Efficiency of Numerical Integration Algorithms Related to Divisor Theory in Cyclotomic Fields, Mat. notes, **61**(2), 242-245(1997).
16 Temirgaliev N. On the Construction of Probability Measures on Functional Classes, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **218**, 396-401(1997).
17 Temirgaliev N. Classes $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ and quadrature formulas, Dockland mathematics, **68**(3), 414-415 (2003).
18 Azhgaliev Sh. , Temirgaliev N. Informativeness of Linear Functionals, Mathematical Notes, 73(6), 759-768(2003).
19 Bailov E. A. , Temirgaliev N. Discretization of the solutions to Poisson's equation, Computational mathematics and mathematical physics, 46(9), 1515-1525(2006).
20 Sulejmenov K. M. , Temirgaliev N. O vlozhenii klassov $H_{\alpha,\,p}^\omega$ v prostranstvo lorenca [About the embedding of classes $H_{\alpha,\,p}^\omega$ to the Lorentz space], AnalysisMathematica, 32, 283-317(2006).
21 Azhgaliev Sh. U. , Temirgaliev N. Informativeness of all the Linear Functionals in the recovery of functions in the classes H_p^ω , Mathematical sb. , **198**(11), 1535-1551(2007).
22 Bailov E. A. , Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, pp. 681-685.
23 IbatulinI. , Temirgaliev N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretithation of the solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of L2, ∞ , Differential equation, **44**(4), 510-526 (2008).
24 Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics, **49**(1), 12-22(2009).
25 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. An application of tensor products of functionals in problems of numerical integration, Izvestiya: Mathematics, 73(2), 393-434(2009).
26 Nauryzbaev N. Zh. , Temirgaliev N. On the Order of Discrepancy of the Smolyak Grid, Mathematical Notes, **85**(6), 897-901(2009).
27 Temirgaliev N. Tensor Products of Functionals and Their Application, Docklandy Mathematics, **81**(1), 78-82 (2010,).
28 Temirgaliev N. , Kudaibergenov S. S. , Shomanova A. A. Applications of Smolyak quadrature formulas to the numerical integration of Fourier coefficients and in function recovery problems, Russian Mathematics (Iz VUZ), **54**(3), 45-62(2010,).
29 AbikenovaSh. K. ,TemirgalievN. On the sharp order of informativeness of all possible linear functionals in the discretiztion of solutions of the wave equations, Differential Equation, **46**(8), 1211-1214(2010).
30 Sikhov M. B. , Temirgaliev N. On an algorithm for construction uniformly distribution Korobov grids, Mathematical notes, **87**(6), 916-917(2010,).
31 Abikenova Sh. K. , Utesov A. , Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Mathematical Notes, **91**(3), 121-125 (2012).
32 Nauryzbayev N. , Temirgaliyev N. An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration, Found Comput Math, 12, 139-172(2012).
33 Temirgaliev N. , Sherniyazov K. E. , Berikhanova M. E. Exact Orders of Computational Cross-Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein-Gordon Equation from Fourier Coefficients, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 282, suppl. 1, 165-191(2013).

34 Temirgaliev N. , Abikenova Sh. K. , Zhubanysheva A. Zh. , Taugynbaeva G. E. . Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ), **57**(8), 75-80(2013).

35 Bailov E. A. , Sikhov M. B. , Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **54**(7), 1061–1078(2014).

36 Temirgaliev N. , M. A. Zhainibekova, G. T. Dzhumakaeva Criteria for embedding of classes of Morrey type, Russian Mathematics, **59**(5), 69-73(2015).

37 Temirgaliev N. , N. Zh. Nauryzbayev, A. A. Shomanova Approximative capabilities of "Smolyak type" computational aggregates with Dirichlet, Fejйr and Valleй-Poussin kernels in the scale of Ul'yanov classes, Russian Mathematics, **59**(7), 67-72(2015).

38 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **55**(9), 1432–1443(2015).

39 Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. Rapid "algebraic" Fourier transforms on uniformly distributed meshes, Russian Mathematics, **60**(5), 81-85(2016).

40 Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. "Geometry of Numbers"in a Context of Algebraic Theory of Numbers, Russian Mathematics, **60**(10), 77–81(2016).

41 Temirgaliev N. , M. A. Zhainibekova, G. T. Dzhumakaeva "A criterion for embedding of anisotropic Sobolev-Morrey spaces into the space of uniformly continuous functions", Siberian Mathematical Journal, **57**(5), 905–917(2016).

42 Temirgaliev N. , Zhubanisheva A. Zh. Order Estimates of the Norms of Derivatives of Functions with Zero Values on Linear Functionals and Their Applications, Russian Mathematics, **61**(3), 77–82(2017).

43 Temirgaliev N. , N. Zh. Nauryzvaev, A. A. Shomanov On Some Special Effects in Theory on Numerical Integration and Functions Recovery, Russian Mathematics, **62**(3), 84–88(2018).

44 Sikhov M. B. On direct and converse theorems of the theory of approximations with a given majorant, Analysis Mathematica, **30**(2), 137-146(2004).

45 Alshynbaeva E. Transforms of Fourier coefficients of some classes of functions, Mathematical Notes, **25**(5), 332-335(1979).

46 Alshynbaeva E. o preobrazovanii kojefficientov fur'e nekotoryh klassov funkcij [On the transformation of the Fourier coefficients of certain classes of functions], Dokl. AN SSSR[Dockland Mathematics], **236**(6), 1293-1295 (1977).

47 Dzhumakaeva G. T. A criterion for embedding of the Sobolev-Morrey class $W^{l}_{p,\Phi}$ in the space C , Mathematical Notes, **73**(3), 224-228(1985).

48 Nurmoldin E. E. Restoration of functions, integrals, and solutions to the heat conductivity equation from the Ul'yanov U2-classes, Sib. Zh. Vychisl. Mat. , **8**(4), 337-351(2005).

49 Kovaleva I. M. Recovery and integration of functions from the Korobovs anisotropic class, Sib. Zh. Vychisl. Mat. , **5**(3), 255-266(2002).

50 Azhgaliev Sh. On the discretization of solutions of the heat equation, Mathematical Notes, **82**(2), 153-158(2007).

51 Kudaibergenov S. S. , Sabitova S. G. Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **53**(7), 896-907(2013).

52 Sikhov M. B. The embedding and approximation for classes of functions with a dominant mixed difference, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **53**(8), 69-71(2009).

53 Sikhov M. B. Inequalities of Bernstein and Jackson-Nikol'skii type and estimates of the norms of derivatives of Dirichlet kernels, Mathematical Notes, **80**(1), 91-100(2006).

54 Sikhov M. B. Inequalities of Bernstein and Jackson-Nikol'skii types and their applications, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **46**(8), 54-61 (2002).

55 Sikhov M. B. On the embedding $E_p(\lambda) \subset H_C^{\omega_k}$, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **34**(7), 70-75(1990).

56 Sikhov M. B. Some embedding theorems, Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **32**(9), 124-126 (1988).

57 Temirgaliyev N., Temirgaliyeva Zh. N. Polnoe spektral'noe testirovanie po metodu Kovjeju-Makfersona generatorov sluchajnyh chisel Lehmera s maksimal'nym periodom, Vest. ENU im. L. N. Gumileva [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University], 111(2), 61-83 (2016).

58 Temirgaliyeva Zh. N. , Temirgaliyev N. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period, arXiv:1607. 00950 [math. NA].

59 Temirgaliyev N. Are mark about Galerkin method, arXiv:1705. 06880 [math. NA].

60 Temirgaliyev N. O nekotoryh mnogomernyh teoremah vlozheniya i o proizvodnyh iz klassov $\varphi(L)$ [On some multidimensional embedding theorems and on derivatives of the classes $\varphi(L)$], avtoreferat kandidatskoj dissertacii, Matematicheskij institut im. V.A. Steklova AN SSSR, Moskva, 1973 g.[the author's abstract of the candidate's dissertation, Steklov Mathematical Institute. V.A. Steklov Academy of Sciences of the USSR](Moscow, 1973.)

61 Temirgaliyev N. Ob efektivnosti algoritmov chislennogo integrirovaniya i vosstanovleniya funkcij mnogih peremennyh [On the efectiveness of algorithms for numerical integration and recovery of functions of several variables], avtoreferat doktorskoj dissertacii, Matematicheskij institut im. V.A. Steklova AN SSSR, Moskva, 1991 g.[the author's abstract of the doctoral dissertation, Steklov Mathematical Institute. V.A. Steklov Academy of Sciences of the USSR](Moscow, 1991.)

62 Temirgaliyev N. Teoretiko-chislovye metody i teoretiko-verojatnostnyj podhod k zadacham Analiza. Teorija vlozhenij i priblizhenij, absoljutnaja shodimost' i preobrazovanija rjadov Fur'e [Numerical-theoretic methods and the probability-theoretic approach to the problems of the Analysis. The theory of embeddings and approximations, absolute convergence and transformations of Fourier series], Vestnik Evrazijskogo universiteta [Bulletin of the Eurasian University], (3), 90-144 (1997).

63 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series.], Vest. ENU im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilev ENU], 1-194 (2010).

64 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV [Electronic edition. IThMandSC], Astana, 1-259(2012).

65 Temirgaliyev N. Nepreryvnaja i diskretnaja matematika v organicheskom edinstve v kontekste napravlenij issledovanij [Continuous and discrete mathematics in organic unity in the context of research directions], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV. (postojanno dopolnjaemyj po novym rezul'tatam i sootvetstvenno po novym i utochnjaemym postanovkam zadach – iz-za laviny rezul'tatov poslednih let vse vremja otodvigaemyj) [Electronic edition. IThMandSC. (constantly supplemented by new results and accordingly on new and more refined statements of problems - because of the avalanche of the results of recent years)], Astana, 2018.

66 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 1 [Mathematical analysis. Vol 1] (Mektep, Almaty, 1987, 288 p.). [in Kazakh]

67 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 1 [Mathematical analysis. Vol 2] (Ana-tili, Almaty, 1991, 400 p.). [in Kazakh]

68 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz. Tom 3 [Mathematical analysis. Vol 3] (Bilim, Almaty, 1997, 432 p.). [in Kazakh]

69 Temirgaliyev N. Matematikalyk analiz (ondelgen zhane tolyktyrylgan ekinshi basylym)[Mathematical analysis (revised and enlarged second edition)], 2018, 1600 p.

70 Temirgaliyev N. Dejstvietl'nyj analiz: mera i integral Lebega [Real analysis: Lebesgue measure and integral]. Jelektronnoe izdanie. ITMiNV. [Electronic edition. IThMandSC], Astana, 2012.

71 Temirgaliyev N. Teorija verojatnostej [Probability theory], Jelektronnoe izdanie. ITMiNV. [Electronic edition. IThMandSC], Astana, 2012.

72 Temirgaliyev N. , Aubakir B. , Bailov Y. , Potapov K. , SHerniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of the analysis], X-XI classes, (Zhazushy, Almaty, 2002, 382 p.).

73 Temirgaliyev N. , Aubakir B. , BailovY. , Potapov K. , SHerniyazov K. Algebra zhane analiz bastamalary [Algebra and the beginning of the analysis], X-XI classes, (Zhazushy, Almaty, 2002, 423 p.).

Сведения об авторае:

Темірғалиев Н. – Профессор, физика-математика ғылымдарының докторы, Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институтының директоры, Астана, Қазақстан.

Temirgaliyev N. -Prof. , Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot the L. N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 27. 03. 2018