

МРНТИ: 27.35.33, 30.19.17

В.Н. Украинец, С.Р. Гирнис, Л.В. Горшкова, Г.А. Жукенова

*Торайғыров университеті, Ак. Шөкин көш., 139, Павлодар, Қазақстан  
(E-mail: [vitnikukr@mail.ru](mailto:vitnikukr@mail.ru), [girnis@mail.ru](mailto:girnis@mail.ru), [gorshkova\\_larisa@mail.ru](mailto:gorshkova_larisa@mail.ru),  
[gulnara-home@mail.ru](mailto:gulnara-home@mail.ru))*

## ТАЯЗ ТӨСЕУ ТОННЕЛІНЕ ҚАЛЫПТЫ ЖӘНЕ ЖАНАМА КӨЛІК ЖҮКТЕМЕЛЕРІНІҢ ӘСЕРІ

**Аннотация:** Жылжымалы цилиндрлік және декарттық координаттар жүйелерінде жүктемелердің қалыпты және параллель осі бойымен біркелкі қозғалатын ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек серпімді қабықтың ішкі бетіне әсер ету мәселесі шешілді. Қабық көлденең шекарасы қабық осіне параллель болатын серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан. Жүктемелердің қозғалыс жылдамдығы массивтегі жылжу толқындарының таралу жылдамдығынан кем қабылданады. Жүктеме функциялары бұрыштық координатадағы Фурье қатарына және осьтік координатадағы Фурье интегралына ыдырауы мүмкін. Қабықтың қозғалысы қабық теориясының классикалық теңдеулерімен, ал серпімді жартылай кеңістік - Ламе потенциалдары арқылы көрсетілген қозғалыстардағы серпімділік теориясының теңдеулерімен сипатталады. Шешім үшін интегралды Фурье түрлендіру әдісі қолданылады. Массив серпімді кеңістік түрінде ұсынылатын мұндай жұмыстардан айырмашылығы мұнда мәселені шешу кезінде жүктемелердің қозғалысы кезінде пайда болатын жартылай кеңістік шекарасымен шағылысқан толқындардың массивіне әсері ескеріледі. Бұл мәселе осы типтегі жүктемелерге ұшыраған жағдайда жұқа қабырғалы қаптамамен бекітілген таяз төсеу тоннелінің динамикасын зерттеу кезінде модельді болып табылады. Белгілі бір аралықта біркелкі қолданылатын және тұрақты жылдамдықпен қозғалатын ось-симметриялық қалыпты жүктеме (қозғалатын объекіден қысым тоннелін қаптауға әсер ету) және ось-симметриялық жанама жүктеме (қозғалатын объекіден үйкеліс күштерінің тоннелін қаптауға әсер ету) кезінде тау жыныстарының массивінің кернеулі-деформацияланған күйін (КДК) бейнелейтін сандық эксперименттің нәтижелері келтірілген.

**Түйінді сөздер:** тоннель, серпімді жартылай кеңістік, цилиндрлік қабық, тасымалдау жүктемесі, кернеулі деформацияланған күй.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/3.2>

### 2000 Mathematics Subject Classification: 74-10

#### 1. Кіріспе

Көлік тоннельдері, магистральдық газ құбырлары және мұнай құбырлары, әртүрлі жүктерді тасымалдауға арналған құбырлар сияқты жерасты құрылыстарын пайдалану тәжірибесі көлік жүктемелерінің динамикалық әсерінен (осы құрылыстарда қозғалатын объектілердің жүктемелері) оларда пайда болатын тербелістердің салдарынан болатын көптеген зақымданулар мен бұзылуларды көрсетеді. Жүктемелердің қозғалыс жылдамдығы артқан кезде діріл деңгейі артады және осы құрылымдар үшін белгіленген рұқсат етілген нормалардан асып кетуі мүмкін. Оларда резонанстық құбылыстардың пайда болу қаупі бар. Сондықтан, соңғы жылдары жерасты құрылыстарына әсер ететін көлік жүктемелері жылдамдығының өсуіне байланысты (атап айтқанда, қозғалатын тоннельшілік көліктен түсетін жүктемелер), осы жүктемелердің әсерінен олардың динамикалық күй-өзгерістерін зерттеу өзекті болып отыр. Зерттеу барысында

құрылымның құрылымдық ерекшеліктеріне ерекше назар аудару керек. Сонымен қатар, оның орналасу тереңдігі үлкен маңызға ие [1].

Көлік жүктемелерінің әсеріне тоннельдің біртекті цилиндрлік қаптамасымен нығайтылған динамикалық есептеу кезінде оның есептік схемасы әдетте серпімді ортада ұзартылған цилиндрлік қабық түрінде ұсынылады. Қабықтың ішкі бетіне оның осі бойымен қозғалатын жүктеме (көлік жүктемесі) әсер етеді. Тоннельді терең төсеу кезінде қабық шексіз ортада (серпімді кеңістікте), таяз төсеу кезінде – жазықтықпен (серпімді жартылай кеңістікте) қабықтың осіне параллель шектелген ортада қарастырылады. Серпімді кеңістіктегі дөңгелек цилиндрлік қабыққа қозғалатын ось-симметриялық қалыпты жүктеменің әрекеті туралы есеп (терең тоннельге арналған модельдік таспырма) [2] мақалада шешілген. Ось-симметриялық емес жылжымалы жүктеме қабығына әсер етудегі ұқсас таспырма [3] мақалада және басқа еңбектерде қарастырылады.

Неғұрлым күрделі мәселе – бұл таяз төсеу тоннельдің динамикалық әрекетін модельдейтін серпімді жартылай кеңістіктегі қабыққа қозғалатын жүктеменің әсері. Осы бағытта жарияланған ғылыми еңбектердің саны аз және негізінен соңғы жылдарды қамтиды, атап айтқанда [4 – 8]. Бұл жұмыстарда сандық эксперименттер жүргізу кезінде серпімді жартылай кеңістікте орналасқан жұқа қабырғалы немесе қалың қабырғалы біртекті серпімді дөңгелек цилиндрлік қалыпты қозғалмалы жүктеме қабығына түсетін әсер қарастырылды.

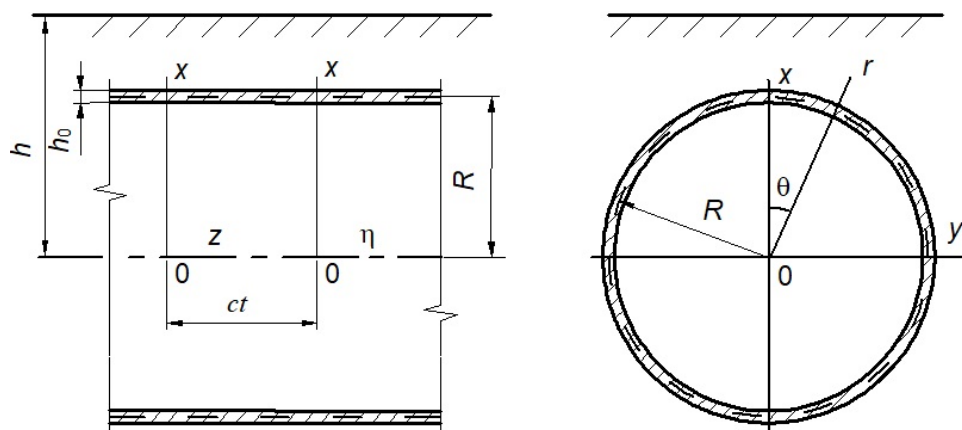
Үйкеліс арқылы оның бетіне қалыпты қысым жүктемесін беретін тоннель арқылы қозғалатын объект осьтік тангенс жүктемесін де беретіндіктен, бұл жүктеме әсерінің массивтың кернеулі-деформацияланған күйіне (КДК) әсерін зерттеуге қызығушылық тудырады.

## 2. Әдістер

Зерттеуде серпімділік теориясының модельдерін тарта отырып математикалық модельдеу әдісі қолданылады.

### *Мәселенің қойылуы және шешілуі*

Тоннельдің есептік схемасы ретінде цилиндрлік  $r, \theta, z$  және декарттық  $x, y, z$  координаттар жүйелерінде кеңістікте тұрақты қалыбы бар, сызықтық серпімді жартылай кеңістік болып табылатын біртекті және изотропты ортаны (массивті) қарастырамыз. Көлденең шекарасы жүктемелерден бос жартылай кеңістікте радиусы  $R$  болатын шексіз ұзын дөңгелек цилиндрлік қуыс бар, оның осі осы шекараға параллель  $z$  оське сәйкес келеді. Координаталық ось  $x$  жартылай кеңістіктің 4 шекарасына перпендикулярлы:  $x \leq h$  ( $h > R$ ), мұндағы  $h$  - тоннель төсеу тереңдігі (1-сурет). Қуыс қалыңдығы  $h_0$  болатын серпімді жұқа қабырғалы қабықпен (қаптамамен) бекітілген. Қабық жұқа қабырғалы болғандықтан, оның радиусы  $R$  қуыс радиусына тең болатын ортаңғы бет бойындағы массивпен жанасады деп есептейміз. Қабықтың массивпен жұптасуы қатты қабылданады.



Сурет 1 – Серпімді жартылай кеңістіктегі жұқа қабырғалы қабық

Массив пен қабық материалдарының физика-механикалық сипаттамалары үшін біз келесі белгілерді қолданамыз. Пуассон коэффициенті:  $\nu$  (массив үшін),  $\nu_0$  (қабық үшін); ығысу модулі:  $\mu$  (массив үшін),  $\mu_0$  (қабық үшін); тығыздығы:  $\rho$  (массив үшін),  $\rho_0$  (қабық үшін). Қабықтың ішкі беті бойымен  $c$  тұрақты жылдамдықпен  $z$  ось бағытында жалпы қолдану нүктелері және бірдей қалыпты жүктеме және  $z$  осіне параллельді жанама жүктемесі қозғалады. Біз массивтың ҚДК анықтаймыз.

Мәселені шешу үшін біз жылжымалы координаттар жүйесін қолданамыз: цилиндрлік  $(r, \theta, \eta = z - ct)$  және декарттық  $(x, y, \eta = z - ct)$ . Бұл координаттар жүйелерінде массив пен қабықтың қозғалысын, сәйкесінше, (1) және (2) теңдеулерімен сипаттаймыз [3, 4]:

$$(M_p^{-2} - M_s^{-2}) \text{grad div } \mathbf{u} + M_s^{-2} \nabla^2 \mathbf{u} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial \eta^2, \quad (1)$$

мұнда  $M_p = c/c_p$ ,  $M_s = c/c_s$  – Мах сандары;  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – массивтегі ығысу толқындарының тарату және кеңейю-сығылу жылдамдықтары,  $\lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu)$ ;  $\nabla^2$  – Лаплас операторы,  $\mathbf{u}$  – массив нүктелерінің ығысу векторы.

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} &= \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\eta - q_\eta), \\ \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_0)}{2} \left( 1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} &= -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} q_\theta, \\ \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} &= -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_r), \end{aligned} \quad (2)$$

мұнда  $q_j$  және  $u_{0j}$  – массивтың және қабықтың орташа бетіндегі нүктелердің жылжу реакциялары ( $r = R$ -де  $q_j = \sigma_{rj}$ , мұнда  $\sigma_{rj}$  – массив нүктелеріндегі кернеулер),  $j = \eta, \theta, r$ ;  $P_\eta(\theta, \eta)$  және  $P_r(\theta, \eta)$  – жанама жүктеменің қарқындылығы және қалыпты жүктеменің қарқындылығы.

Мәселенің тұжырымына сәйкес, жартылай кеңістік пен қуыс бетінің шекаралық шарттары сәйкесінше (3) және (4) көрініске ие болады:

$$\sigma_{xx}|_{x=h} = \sigma_{xy}|_{x=h} = \sigma_{x\eta}|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

$$u_j|_{r=R} = u_{0j}, \quad j = \eta, \theta, r. \quad (4)$$

Мұнда  $u_j$  –  $\mathbf{u}$  вектордың компоненттері.

$\mathbf{u}$ -ді  $\varphi_j (j = 1, 2, 3)$  Ламе потенциалдары арқылы білдіреміз [9]

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta), \quad (5)$$

мұнда  $\mathbf{e}_\eta$  –  $\eta$  осінің орты.

(1)-ден және (5)-тен ілеседі:

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \partial^2 \varphi_j / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Мұнда  $M_1 = M_p$ ,  $M_2 = M_3 = M_s$ .

Массивтың ҚДК компоненттерін  $\varphi_j$  Ламе потенциалдары арқылы көрсетеміз:

(5) декарттық (7) және цилиндрлік (8) жылжымалы координаттар жүйелерінде  $\mathbf{u}$  вектордың компоненттері:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial \eta}, \\ u_y &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial \eta}, \\ u_\eta &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial r}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta}, \\ u_\eta &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Гук заңын пайдаланып, (7), (8) ескере отырып кернеулер тензор компоненті үшін декарттық (9) және цилиндрлік (10) координаттарда өрнектерді табамыз

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{xx} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{x\eta} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\ \sigma_{\eta y} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y \partial \eta} \right); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\eta\eta} &= (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial \eta} \right), \\ \sigma_{rr} &= \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r^2 \partial \eta} \right), \\ \sigma_{r\eta} &= \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \\ \sigma_{\eta\theta} &= \mu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_s^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta \partial \eta^2} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

(6) теңдеулерге  $\eta$  бойынша Фурье түрленуін қолдана отырып, шығарамыз

$$\nabla_2^2 \varphi_j^* - m_j^2 \xi^2 \varphi_j^* = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (11)$$

мұнда  $\varphi_j^*(r, \theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(r, \theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$ ,  $m_j^2 = 1 - M_j^2$ ,  $m_1 \equiv m_p$ ,  $m_2 = m_3 \equiv m_s$ ,  $\nabla_2^2$  – Лапласстың жазық операторы.

(7) – (10)-ға  $\eta$  бойынша Фурье түрленуін қолдана отырып декарттық ( $l, m = x, y, \eta$ ) және цилиндрлік ( $l, m = r, \theta, \eta$ ) координаттар жүйелерінде  $\varphi_j^*$  арқылы ұсынылған  $u_l^*$  ығысулар мен  $\sigma_{lm}^*$  кернеулердің трансформанттары үшін өрнектерді шығарамыз.

Массивтегі толқындарының таралу жылдамдығынан кем деп есептей отырып, жүктемелердің қозғалу жылдамдығына шектеу енгізейік, яғни  $c < c_s$ . Сонда,  $M_s < 1$  ( $m_2 = m_3 = m_s > 0$ ). Бұл жағдайда (11) теңдеулердің шешімдерін келесі түрде ұсынамыз:

$$\varphi_j^* = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}. \quad (12)$$

Мұнда,  $\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta}$ ,  $\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) d\zeta$ ,  $K_n(kr)$  – Макдональд функциялары,  $k_j = m_j \xi$ ;  $a_{nj}$ ,  $g_j(\xi, \zeta)$  – анықтауға жататын коэффициенттер мен функциялар,  $j = 1, 2, 3$ .

Декарттық координаттар жүйесінде (12) трансформант потенциалдары үшін өрнектер келесі түрге айналады:

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (13)$$

Мұнда,  $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}$ ,  $\Phi_{nj} = \left(\frac{\zeta + f_j}{k_j}\right)^n$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

$g_j(\xi, \zeta)$  көрсеткішін  $a_{nj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) коэффициенттер арқылы білдіреміз. Ол үшін (13) ескере отырып,  $\sigma_{xx}^*$ ,  $\sigma_{xy}^*$ ,  $\sigma_{x\eta}^*$  үшін қайта жазылған (3) шекаралық шарттарды қолданамыз.  $e^{iy\zeta}$  жанындағы коэффициенттерді белгілеп және оларды нөлге теңестіріп ( $y$  еріктілігінің күшін ескере отырып), үш теңдеулер жүйесін шығарамыз. Осы теңдеулер жүйесінен анықтаймыз:

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}. \quad (14)$$

мұнда  $\Delta_* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}$ ,

$$\Delta_{11}^* = \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \quad \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \quad \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2)\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{21}^* = -\frac{M_s^2}{m_s^2} \Delta_{12}^*, \quad \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \quad \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_s^2}{m_s^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{31}^* = -\frac{\Delta_{13}^*}{m_s^2 \zeta^2}, \quad \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \quad \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}},$$

$$\alpha = M_p \xi, \quad \beta = M_s \xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\rho_{**}^2 = \xi^2 + (2/m_s^2 - 1)\zeta^2.$$

$c < c_R$  шартында  $\Delta_*(\xi, \zeta)$  - нөлге айнамайтын Рэлей детерминанты екенін дәлелдеу қиын емес, мұнда  $c_R$  – Рэлейдің жартылай кеңістіктегі беткі толқындарының жылдамдығы [9].

$c < c_R$  -де, (14) өрнектерді ескере отырып, (13) ара салмақтар келесі түріне айналады

$$\varphi_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (15)$$

Декарттық ( $l, m = x, y, \eta$ ) координаттар жүйесінде ұсынылған  $u_l^*$  және  $\sigma_{lm}^*$  үшін өрнектерге (15)-ті алмастырып, шығарамыз

$$u_l^* = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left( T_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + T_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta,$$

$$\frac{\sigma_{lm}^*}{\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left( S_{lmj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + S_{lmj}^{(2)} F_{nj}^{(2)} \right) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta.$$

Мұнда:  $l = x, y, \eta$ ,  $m = x, y, \eta$ ;

$$\begin{aligned}
 F_{nj}^{(1)} &= \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_{nj} \Phi_{nj}, & F_{nj}^{(2)} &= e^{(x-h)f_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\Delta_{jk}^*}{\Delta_*} e^{-hf_k} \sum_n a_{nk} \Phi_{nk}, \\
 T_{x1}^{(1)} &= -T_{x1}^{(2)} = -f_1, & T_{x2}^{(1)} &= T_{x2}^{(2)} = -\zeta, & T_{x3}^{(1)} &= -T_{x3}^{(2)} = f_3 \xi, \\
 T_{y1}^{(1)} &= T_{y1}^{(2)} = i\zeta, & T_{y2}^{(1)} &= -T_{y2}^{(2)} = if_2, & T_{y3}^{(1)} &= T_{y3}^{(2)} = -i\xi\zeta, \\
 T_{\eta 1}^{(1)} &= T_{\eta 1}^{(2)} = i\xi, & T_{\eta 2}^{(1)} &= T_{\eta 2}^{(2)} = 0, & T_{\eta 3}^{(1)} &= T_{\eta 3}^{(2)} = -im_s^2 \xi^2, \\
 S_{xx1}^{(1)} &= S_{xx1}^{(2)} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_p^2), & S_{xx2}^{(1)} &= -S_{xx2}^{(2)} = 2\zeta f_2, & S_{xx3}^{(1)} &= S_{xx3}^{(2)} = -2f_3^2 \xi, \\
 S_{yy1}^{(1)} &= S_{yy1}^{(2)} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_p^2), & S_{yy2}^{(1)} &= -S_{yy2}^{(2)} = -2f_2 \zeta, & S_{yy3}^{(1)} &= S_{yy3}^{(2)} = 2\xi \zeta^2, \\
 S_{\eta\eta 1}^{(1)} &= S_{\eta\eta 1}^{(2)} = n_2 - 2n_1, & S_{\eta\eta 2}^{(1)} &= S_{\eta\eta 2}^{(2)} = 0, & S_{\eta\eta 3}^{(1)} &= S_{\eta\eta 3}^{(2)} = 2m_s^2 \xi^3, \\
 S_{xy1}^{(1)} &= -S_{xy1}^{(2)} = -2f_1 \zeta i, & S_{xy2}^{(1)} &= S_{xy2}^{(2)} = -(f_2^2 + \zeta^2) i, & S_{xy3}^{(1)} &= -S_{xy3}^{(2)} = 2f_3 \xi \zeta i, \\
 S_{\eta y 1}^{(1)} &= S_{\eta y 1}^{(2)} = -2\xi \zeta, & S_{\eta y 2}^{(1)} &= -S_{\eta y 2}^{(2)} = -\xi f_2, & S_{\eta y 3}^{(1)} &= S_{\eta y 3}^{(2)} = n_2 \zeta, \\
 S_{x\eta 1}^{(1)} &= -S_{x\eta 1}^{(2)} = -2f_1 \xi i, & S_{x\eta 2}^{(1)} &= S_{x\eta 2}^{(2)} = -\xi \zeta i, & S_{x\eta 3}^{(1)} &= -S_{x\eta 3}^{(2)} = n_2 f_3 i, \\
 n_1 &= (1 + m_p^2) \xi^2, & n_2 &= (1 + m_s^2) \xi^2.
 \end{aligned}$$

(12) трансформант потенциалдарын цилиндрлік координаттар жүйесінде ұсыну үшін біз [10] қатынасын қолданамыз

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(kr) e^{in\theta} \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k^2}}{k}\right)^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k^2}}.$$

Мұнда  $I_n(kr)$  – Бессельдің модификацияланған функциялары.

Сонда

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( a_{nj} K_n(k_j r) + I_n(k_j r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-hf_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

$c < c_R$ -те бұл өрнектер, (14) ескере отырып мынадай түріне айналады,

$$\varphi_j^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_j r) + b_{nj} I_n(k_j r)) e^{in\theta}, \tag{16}$$

мұнда  $b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$ ,  $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta$ .

Цилиндрлік  $(l, m = r, \theta, \eta)$  координаттар жүйесінде ұсынылған  $u_i^*$  және  $\sigma_{lm}^*$  үшін өрнектерге (16)-ны алмастырып, шығарамыз

$$\begin{aligned}
 u_i^* &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[ T_{lj}^{(1)}(K_n(k_j r)) a_{nj} + T_{lj}^{(2)}(I_n(k_j r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}, \\
 \frac{\sigma_{lm}^*}{\mu} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[ S_{lmj}^{(1)}(K_n(k_j r)) a_{nj} + S_{lmj}^{(2)}(I_n(k_j r)) b_{nj} \right] e^{i(\xi\eta + n\theta)}.
 \end{aligned}$$

Мұнда,  $l = r, \theta, \eta$ ,  $m = r, \theta, \eta$ ;

$$\begin{aligned}
 T_{r1}^{(1)} &= k_1 K'_n(k_1 r), & T_{r2}^{(1)} &= -\frac{n}{r} K_n(k_2 r), & T_{r3}^{(1)} &= -\xi k_3 K'_n(k_3 r), \\
 T_{\theta 1}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_1 r) i, & T_{\theta 2}^{(1)} &= -k_2 K'_n(k_2 r) i, & T_{\theta 3}^{(1)} &= -\frac{n}{r} \xi K_n(k_3 r) i, \\
 T_{\eta 1}^{(1)} &= \xi K_n(k_1 r) i, & T_{\eta 2}^{(1)} &= 0, & T_{\eta 3}^{(1)} &= -k_3^2 K_n(k_3 r) i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{rr1}^{(1)} &= 2 \left( k_1^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r) - \frac{2k_1 K_n'(k_1 r)}{r}, S_{rr2}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_2 r) - \frac{2k_2 K_n'(k_2 r)}{r}, \\
 S_{rr3}^{(1)} &= -2\xi \left( k_3^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_3 r) + \frac{2\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta 1}^{(1)} &= -2 \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda M_p^2 \xi^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r) + \frac{2k_1 K_n'(k_1 r)}{r}, S_{\theta\theta 2}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_2 r)}{r^2} + \frac{2nk_2 K_n'(k_2 r)}{r}, \\
 S_{\theta\theta 3}^{(1)} &= \frac{2\xi n^2 K_n(k_3 r)}{r^2} - \frac{2\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r}, \\
 S_{\eta\eta 1}^{(1)} &= -2\xi^2 \left( \frac{1 + \lambda M_p^2}{2\mu} \right) K_n(k_1 r), S_{\eta\eta 2}^{(1)} = 0, S_{\eta\eta 3}^{(1)} = 2m_3^2 \xi^3 K_n(k_3 r), \\
 S_{r\theta 1}^{(1)} &= \left( -\frac{2n K_n(k_1 r)}{r^2} + \frac{2nk_1 K_n'(k_1 r)}{r} \right) i, S_{r\theta 2}^{(1)} = \left( -\left( k_2^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_2 r) + \frac{2k_2 K_n'(k_2 r)}{r} \right) i, \\
 S_{r\theta 3}^{(1)} &= \left( \frac{2n\xi K_n(k_3 r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_3 K_n'(k_3 r)}{r} \right) i, \\
 S_{\theta\eta 1}^{(1)} &= -\frac{2n\xi K_n(k_1 r)}{r}, S_{\theta\eta 2}^{(1)} = \xi k_2 K_n'(k_2 r), S_{\theta\eta 3}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_3^2) K_n(k_3 r)}{r}, \\
 S_{r\eta 1}^{(1)} &= 2\xi k_1 K_n'(k_1 r) i, S_{r\eta 2}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_2 r) i}{r}, S_{r\eta 3}^{(1)} = -\xi^2 k_3 (1 + m_3^2) K_n'(k_3 r) i;
 \end{aligned}$$

$K_n'(kr) = \frac{dK_n(kr)}{d(kr)}$ ;  $T_{lj}^{(2)}$ ,  $S_{lmj}^{(2)}$ ,  $T_{lj}^{(1)}$ ,  $S_{lmj}^{(1)}$ -ден  $K_n(k_j r)$  -ны  $I_n(k_j r)$  -ге ауыстыру арқылы алынады.

$u_l^*$  ығысулар мен  $\sigma_{lm}^*$  кернеулердің трансформанттары үшін өрнектеріне кіретін  $a_{nj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) белгісіз коэффициенттерді анықтау мақсатында келесі түрде ұсынылған (4) шекаралық шарттарын пайдаланамыз:

$$u_j^*|_{r=R} = u_{0j}^*, j = \eta, \theta, r. \quad (17)$$

Мұнда,  $u_{0j}^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{0j}(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$ .

(2)-ге  $\eta$  бойынша Фурье түрлендіруін қолданып және  $\theta$  бойынша Фурье қатарында  $P_j^*(\theta, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} P_j(\theta, \eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$  және  $u_{0l}^*(\theta, \xi)$  ( $j = \eta, r, l = \eta, \theta, r$ ) функцияларын ыдыратумен, шығарамыз:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_* n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0 \xi_0 u_{0nr} &= G_0 (P_{n\eta} - q_{n\eta}), \\
 \nu_* n \xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2in u_{0nr} &= -G_0 q_{n\theta}, \\
 2i\nu_0 \xi_0 u_{0n\eta} + 2in u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} &= G_0 (P_{nr} - q_{nr}),
 \end{aligned}$$

мұнда

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^2 &= \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2, \quad \xi_0 = \xi R, \\
 \alpha_0^2 &= 2\xi_0^2 + \nu_{**} n^2, \quad \beta_0^2 = \nu_{**} \xi_0^2 + 2n^2, \quad \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2, \quad \varepsilon_0^2 = \nu_{**} \xi_0^2 M_{s0}^2, \\
 \nu_{**} &= 1 - \nu_0, \quad \nu_* = 1 + \nu_0, \quad M_{s0} = c/c_{s0}, \quad c_{s0} = \left( \frac{\mu_0}{\rho_0} \right)^{1/2}, \quad \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, \quad G_0 = -\frac{\nu_{**} R^2}{\mu_0 h_0};
 \end{aligned}$$

$P_{nj}$  және  $u_{0nl}$  ( $r = R, j = \eta, r, l = \eta, \theta, r$ )-де,  $q_{nl} = (\sigma_{rl}^*)_n$  шартында,  $\theta$  бойынша Фурье қатарында  $P_j^*(\theta, \xi)$  и  $u_{0l}^*(\theta, \xi)$  ыдырату коэффициенттері.

$u_{0nl}$  ( $l = \eta, \theta, r$ ) қатысты соңғы теңдеулерді шеше отырып, шығарамыз:

$$u_{0n\eta} = G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\eta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}),$$

$$u_{0n\theta} = G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{\theta j}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj}),$$

$$u_{0nr} = G_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\delta_{rj}}{\delta_n} (P_{nj} - q_{nj})$$

Мұнда,

$$\begin{aligned} \delta_n &= \delta_{|n|} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3, \\ \delta_{\eta 1} &= (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \varepsilon_3^2, \quad \delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3), \\ \delta_{\theta 1} &= \delta_{\eta 2}, \quad \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3), \\ \delta_{r1} &= -\delta_{\eta 3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}, \quad \delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2, \\ \xi_1 &= 2n, \quad \xi_2 = 2\nu_0 \xi_0, \quad \xi_3 = \nu_* \xi_0 n; P_{n1} = P_{n\eta}, P_{n2} = P_{n\theta} = 0, P_{n3} = P_{nr}, q_{n1} = q_{n\eta}, q_{n2} = \\ q_{n\theta}, q_{n3} &= q_{nr}. \end{aligned}$$

Тиісті өрнектерді (17) алмастырып,  $e^{in\theta}$  шартында, Фурье-Бессель қатарларының коэффициенттерін теңестіре отырып,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  әр мән үшін сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін шығарамыз, егер оның анықтаушы  $\Delta_n(\xi, c) \neq 0$  болса, оның жалғыз шешімі болады. Бұл теңдеулер жүйелерінен  $a_{nj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) коэффициенттерін шығарамыз. Содан кейін, Фурьенің кері түрленуін қолданып массивтегі  $u_l$  ығысулары мен  $\sigma_{lm}$  кернеулерін ( $l, m = r, \theta, \eta$ ) есептейміз. Сондай-ақ, егер  $c < c_{(n)*}$  (мұнда  $c_{(n)*}$  – қабықтағы резонанстық құбылыстар пайда болатын жүктемелердің сындарлы жылдамдығы), кез келген сандық әдісін қолдануға болады.  $n$  санына тәуелді  $c_{(n)*}$  мәндер  $\Delta_n(\xi, c) = 0$  теңдеулерден анықталады. Осы теңдеулердің зерттелуімен жүктеменің ең төмен сындарлы жылдамдығы  $n = 0$ -ге, яғни  $\min c_{(n)*} = c_0$  сәйкес келетіні анықталды.

### 3. Нәтижелер мен талқылау

Шығарылған шешімді асыл тұқымды массивтің жұқа қабырғалы қаптамамен бекітілген маңайда тоннельдің радиусы  $R = 1$  м және тереңдігі  $h = 2R$  КДК есептеу үшін қолданамыз ( $\nu = 0, 2$ ,  $\mu = 2, 532 \cdot 10^9$  Па,  $\rho = 2, 5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_s = 1006, 4$  м/с,  $c_R = 917$  м/с) ( $h_0 = 0, 02$  м;  $\nu_0 = 0, 2$ ,  $\mu_0 = 12, 1 \cdot 10^9$  Па,  $\rho_0 = 2, 5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>). Тоннель бойы  $\eta$  осі бағытында  $|\eta| \leq l_0 = 0, 2R$  интервалында біркелкі тіркелген  $p$  қарқындылығымен ось-симметриялық  $P_r$  қалыпты жүктеме (тоннель қаптамасына әсер ететін жылжымалы объектінің қысымы) және  $0, 2p$  қарқындылығымен  $P_\eta$  ось-симметриялық жанама жүктеме (тоннель қаптамасына әсер ететін жылжымалы объектінің үйкеліс күші) жылжып келе жатыр. Жүктемелердің жылжу жылдамдығы  $c = 100$  м/с.  $p$  қарқындылығын  $2l_0$  жүктеу учаскесінің барлық ұзындығы бойынша жалпы қалыпты жүктемесі  $P^{\circ\circ}$  (Н/м) қарқындылығымен, яғни  $p = P^{\circ\circ}/2l_0$  баламалы топталған қалыпты айнала жүктемесіне тең болғандай таңдалуы тиіс.  $u_\eta^\circ = u_{\eta\mu}/P^\circ$  (м),  $\sigma_{\eta\eta}^\circ = \sigma_{\eta\eta}/P^\circ$  белгілерін енгіземіз, мұнда  $P^\circ = P^{\circ\circ}/m$  (Па).

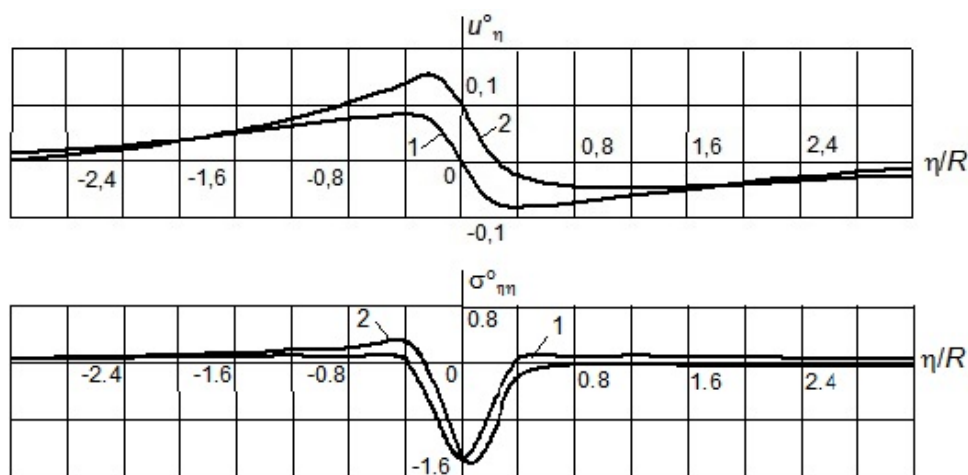
$\eta x$  ( $y = 0$ ) координаттық жазықтықтағы 2, 3 суреттерде  $u_\eta^\circ$  ығысулар мен  $\sigma_{\eta\eta}^\circ$  кернеулердің ( $x = R$ ) қуысының беті бойынша (2-сурет) және ( $x = h$ ) жер беті бойынша (3-сурет) өзгерістер ауытқымасы көрсетілген. 1 ауытқымалары тоннельге әсер ету жағдайдың тек  $P_r$  қалыпты көліктік жүктемесіне, 2 ауытқымалары – тоннельге  $P_r$  қалыпты және  $P_\eta$  жанама көліктік жүктемелерге сәйкес келеді.

Суреттерден тоннельге тек  $P_r$  қалыпты көліктік жүктеменің әсер етуінің жағдайында  $u_\eta^\circ$  және  $\sigma_{\eta\eta}^\circ$  кестелері  $\eta = 0$  тік осіне қатысты, сәйкесінше, қиғаш симметриялық және симметриялық түрде болады, ал  $P_r$  және  $P_\eta$  көліктік жүктемелердің біріккен әсерінде олар мұндай болмайды.

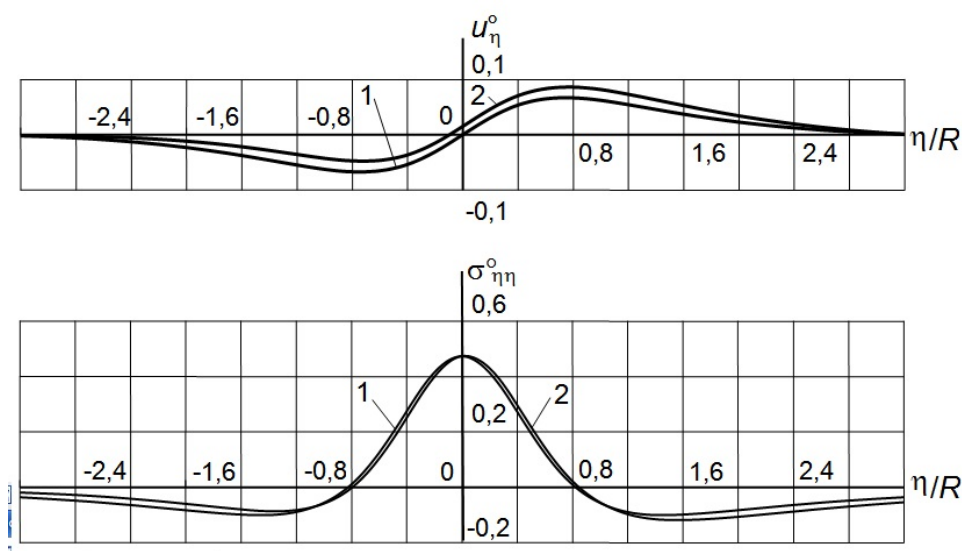
Қуыс бетінде  $x = R$ -де (2-сурет)  $P_\eta$  үйкеліс күштер  $u_\eta^\circ$  ығысулардың экстремалды мәндеріне анағұрлым әсер етеді. Егер  $\eta < 0$ , жоғарғы  $u_\eta^\circ$  ұлғаяды, егер  $\eta > 0$ , жоғарғы  $|u_\eta^\circ|$  азаяды. Бұл жағдайда  $|\sigma_{\eta\eta}^\circ|$  максималды кернеу шамалы өседі.

Жер бетіндегі  $x = h$  (3-сурет)  $\sigma_{\eta\eta}^\circ$  (1, 2 ауытқымалар) айтарлықтай ерекшеленбейді. Тек  $P_r$  көліктік жүктемесінің әсеріндегі абсолюттық шамалар бойынша бірдей болатын  $u_\eta^\circ$  экстремалдық ығысулар  $P_\eta$  үйкелесу күштерін ескерген кезде әртүрлі болады. Көліктік





Сурет 2 –  $\eta x$  ( $y = 0, x = R$ ) координаттық қуыстағы бет бойынша  $u_{\eta}^{\circ}$  ығысулар мен  $\sigma_{\eta\eta}^{\circ}$  кернеулердің өзгеруі.



Сурет 3 –  $\eta x$  ( $y = 0, x = h$ ) координаттық қуыстағы жер беті бойынша  $u_{\eta}^{\circ}$  ығысулар мен  $\sigma_{\eta\eta}^{\circ}$  кернеулердің өзгеруі.

жүктемелерін қолдану учаскесінің алдында жоғарғы  $u_{\eta}^{\circ}$  ұлғаяды, ал артындағы жоғарғы  $|u_{\eta}^{\circ}|$  азаяды. Серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек цилиндрлік қабықтың ішкі бетіне оның қалыпты осі бойымен қозғалатын және осы жанама жүктеме осіне параллель әрекет ету мәселесі шешілді. Мұндай әрекет жүктерді жерасты құбыры арқылы тасымалдау кезінде немесе көліктің тоннель арқылы қозғалысы кезінде туындайтын үйкеліс күштерін есепке алу кезінде орын алады

#### 4. Қорытындылар

Серпімді жартылай кеңістікте (массивте) орналасқан ұзын жұқа қабырғалы дөңгелек цилиндрлік қабықтың ішкі бетіне оның қалыпты осі бойымен қозғалатын және осы жанама жүктеме осіне параллель әрекет ету мәселесі шешілді. Мұндай әрекет жүктерді жерасты құбыры арқылы тасымалдау кезінде немесе көліктің тоннель арқылы қозғалысы кезінде туындайтын үйкеліс күштерін есепке алу кезінде орын алады. Мәселені шешкен кезде жүктемелердің қозғалыс жылдамдығы дыбысқа дейінгі болып қабылданады, яғни жартылай кеңістіктегі толқындарының жылдамдығы аз болады. Бұл жылдамдыққа шектеулер енгізіледі: ол жартылай кеңістіктегі Рэлей толқындарының жылдамдығынан кем және жүктеме қозғалысының маңызды жылдамдығынан кем болуы керек. Массив серпімді кеңістік түрінде ұсынылатын мұндай еңбектерден айырмашылығы, мұнда

мәселені шешу кезінде жүктемелердің қозғалысы кезінде пайда болатын жартылай кеңістік шекарасымен шағылысқан толқындардың массивіне тиетін әсері ескеріледі.

Алынған шешімді пайдалану кезінде жұқа қабырғалы қаптамамен нығайтылған шағын тоннельдің маңындағы тау жыныстарының КДК-ы зерттелді. Тоннельге біркелкі қозғалатын цилиндрлік қалыпты жүктеме (қозғалатын объектіден қысым тоннель қаптамасына әсер ету) және цилиндрлік жанама жүктемесі (қозғалатын объектіден үйкеліс күштерінің тоннель қаптамасына әсер ету) әсер етеді. Зерттеу нәтижелерінен белгілі бір аралықта оның қаптамасына тұрақты қысым көрсететін объектінің тоннелі бойымен біркелкі қозғалу кезінде оның және қаптаманың арасындағы үйкеліс күштері осьтік қозғалыстарға және тау жыныстарындағы қалыпты кернеулерге тек осы жүктемелерді қолдану аймағының маңында айтарлықтай әсер ететіндігі шығады.

### Әдебиеттер тізімі

- 1 Sheng X. A review on modelling ground vibrations generated by underground trains // International Journal of Rail Transportation. – 2019. – № 7 (4). – P. 241 – 261, doi: 10.1080/23248378.2019.1591312.
- 2 Пожув В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 1. – С. 44 – 48.
- 3 Гирнис С.Р. Влияние геометрических параметров обделки на напряженно-деформированное состояние заглубленного тоннеля // Вестник Бурятского университета. – Улан-Удэ. – 2009. – Вып. 3. – С. 132 – 139.
- 4 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45. – № 9. – P. 75-85.
- 5 Coskun I., Enginb H., Ozmutluc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity // Journal of Shock and Vibration. – Hindawi Limited. – 2011. – Vol. 18. – P. 827-838, doi: 10.3233/SAV-2010-0602.
- 6 Coskun I. & Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space // Journal of Engineering. – Hindawi Limited. – 2017. – Vol. 2017. – 12 p., doi: 10.1155/2017/6145375.
- 7 Yuan Z., Bostrom A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space // Journal of Sound and Vibration. – Elsevier. – 2017. – Vol. 387. – p. 177-193, doi: 10.1016/j.jsv.2016.10.016.
- 8 Zhou Sh. Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems. – Academic Press, 2019. – 276 p.
- 9 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
- 10 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. – Алма-Ата: Каз. ССР, 1989. – 240 с.

В.Н. Украинец, С.Р. Гирнис, Л.В. Горшкова, Г.А. Жукунова

*Торайгыров университет, ул. Ак. Чокина, 139, Павлодар, Казахстан*

#### Действие нормальной и касательной транспортных нагрузок на тоннель мелкого заложения

**Аннотация:** В подвижных цилиндрической и декартовой системах координат решена задача о действии на внутреннюю поверхность протяженной тонкостенной круговой упругой оболочки равномерно движущихся вдоль ее оси нормальной и параллельной этой оси касательной нагрузок. Оболочка расположена в упругом полупространстве (массиве), горизонтальная граница которого параллельна оси оболочки. Скорость движения нагрузок принимается меньше скорости распространения волн сдвига в массиве. Функции нагрузок могут быть разложены в ряд Фурье по угловой координате и интеграл Фурье по осевой координате. Движение оболочки описываются классическими уравнениями теории оболочек, а упругого полупространства – уравнениями теории упругости в перемещениях, которые выражаются через потенциалы Ламе. Для решения используется метод интегрального преобразования Фурье. В отличие от подобных работ, где массив представляется в виде упругого пространства, здесь при решении задачи учитывается воздействие на массив отраженных границей полупространства волн, возникающих при движении нагрузок. Данная задача является модельной при исследовании динамики подкрепленного тонкостенной обделкой тоннеля мелкого заложения в случае воздействия на него нагрузок указанного типа. Представлены результаты численного эксперимента, которые иллюстрируют напряженно-деформированное состояние (НДС) породного массива при действии на тоннель равномерно приложенных в определенном интервале и движущихся с постоянной скоростью осесимметричной нормальной нагрузки (действие на обделку тоннеля давления от движущегося объекта) и осесимметричной осевой касательной нагрузки (действие на обделку тоннеля сил трения от движущегося объекта).

**Ключевые слова:** тоннель, упругое полупространство, цилиндрическая оболочка, транспортная нагрузка, напряженно-деформированное состояние.

V.N. Ukrainets, S.R. Girnis, L.V. Gorshkova, G.A. Zhukenova

Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan

**The impact of normal and tangential loads on a shallow tunnel**

**Abstract:** The problem of the action of uniformly moving normal and tangential loads on the inner surface of an elongated thin-walled circular elastic shell along its axis has been solved in moving cylindrical and Cartesian coordinate systems. The shell is located in an elastic half-space (medium) where the horizontal boundary is parallel to the axis of the shell. It is assumed that the moving loads have a lower velocity than the shear wave propagation in the medium. The load functions can be decomposed into a Fourier series by angular coordinate and a Fourier integral by axial coordinate. The motion of the shell is described by the classical equations of shell theory, while the elastic half-space is described by the equations of elasticity theory in displacements, which are expressed in the Lamé potentials. The method of integral Fourier transform is used for solving. In contrast to similar works where the mass is considered as an elastic space, this problem's solution takes into account the effect of waves reflected from the boundary of the half-space, which arise during the movement of loads. This problem serves as a model for studying the dynamics of a shallowly embedded tunnel with a thin lining under the influence of the specified type of loads. The results of a numerical experiment are presented, which illustrate the stress-strain state (SSS) of the rock mass under the influence of uniformly distributed and steadily moving axisymmetric normal (the action of pressure from a moving object on the tunnel lining) and axial tangential (the action of frictional forces from a moving object on the tunnel lining) loads on the tunnel.

**Keywords:** tunnel, elastic half-space, cylindrical shell, transport load, stress-strain state.

**References**

- 1 Xiaozhen Sheng. A review on modelling ground vibrations generated by underground trains. *International Journal of Rail Transportation*, 7 (4), 241-261, (2019).
- 2 Pozhuev V.I. Dejstvie podvizhnoj nagruzki na cilindricheskuyu obolochku v uprugoj srede [The action of a moving load on a cylindrical shell in an elastic medium]. *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 1, 44-48 (1978).
- 3 Girnis S.R. Vlijanie geometricheskikh parametrov obdelki na naprjazhjonno-deformirovannoe sostojanie zaglubennogo tonnelja [The influence of the geometric parameters of the lining on the stress-strain state of the buried tunnel]. *Vestnik Burjatskogo universiteta* [Bulletin of the Buryat University], Ulan-Ude, 3, 132-139 (2009).
- 4 Alexeyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. *International Applied Mechanics*, 45 (9), 75-85 (2009).
- 5 Coskun I., Enginb H., Ozmutluc A.. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity. *Journal of Shock and Vibration*. Hindawi Limited, 18, 827-838 (2011).
- 6 Coskun Э. & Dolmaseven D. Dynamic Response of a Circular Tunnel in an Elastic Half Space. *Journal of Engineering*. Hindawi Limited, 2017, 12 p. (2017).
- 7 Yuan Z., Bostrom A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space. *Journal of Sound and Vibration*. Elsevier, 387, 177-193 (2017).
- 8 Zhou Sh. *Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems*. (Academic Press, 2019. 276p.).
- 9 Novackij V. *Teorija uprugosti* [Theory of elasticity] (Moscow, Mir, 1975. 872p.).
- 10 Erzhanov Zh.S., Ajtaliev Sh.M., Alekseeva L.A. *Dinamika tonnelej i podzemnyh truboprovodov* [Dynamics of tunnels and underground pipelines] (Alma-Ata, Nauka, 1989. 240p.) [in Russian].

**Авторлар туралы мәліметтер:**

Украинец Виталий Николаевич – *Байланыс үшін автор*, техника ғылымдарының докторы, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Гирнис Светлана Римонтасовна – Техникалық ғылымдарының кандидаты, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Горшкова Лариса Владимировна – Техникалық ғылымдарының кандидаты, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Жукенова Гюльнара Абаевна – PhD, «Өнеркәсіптік азаматтық және көлік құрылысы» кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Торайғыров университеті, Ак. Шөкин к-сі 139, Павлодар, Қазақстан.

Ukrainets Vitalii – *Corresponding author*, Doctor of Technical Sciences, professor Department of Industrial Civil and Transport Construction, Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan. .

Girnis Svetlana – Candidate of Technical Sciences, associate professor Department of Industrial Civil and Transport Construction, Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Gorshkova Larisa – Candidate of Technical Sciences, professor Department of Industrial Civil and Transport Construction, Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Zhukenova Gulnara – PhD, associate professor Department of Industrial Civil and Transport Construction Toraighyrov University, 139 Ac. Chokin Str., Pavlodar, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 07.09.2023