

IRSTI: 27.23; 24.01.45; 27.01.33

К.М. Аканова¹, А.А. Мырканова², А.Л. Ластовецкий³, А.М. Шохина⁴

^{1,2} *Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Сатпаева, 2, Астана, 010008, Республика Казахстан*

³ *Колледж университета Дублин - Национальный университет Ирландии, Belfield, 4, Дублин, Ирландия*

⁴ *Карагандинский университет Казпотребсоюза, ул. Академическая, 9, Караганда, Казахстан*

(E-mail: ¹akanova_km@mail.ru, ²asema80@bk.ru, ³alexey.lastovetsky@ucd.ie, ⁴Aiman.sh.m@mail.ru)

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАКРЕПЛЕННОЙ АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОЙ КРЕПЬЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКИ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Аннотация: Проведение подземной конструкции в сплошном массиве горных пород нарушает ее свойство непрерывности и может привести к ее обрушению, что представляет собой угрозу для жизни рабочих, а также причиняет материальный и финансовый ущерб. На сегодняшний день разработано немало способов решения классической задачи по определению напряженно-деформированного состояния горных пород с подземными сооружениями. Однако единой теории для описания напряженно-деформированного состояния горных пород с моментными напряжениями вокруг подземных выработок не существует, поскольку задача осложняется тем, что появляется необходимость расчета деформации изгиба и вращения горного массива, а не только сжатия-растяжения и сдвига. В данной статье предлагается решение задачи об определении зон потери устойчивости выработки эллиптической формы в массиве горных пород с моментными напряжениями в условиях ползучести, которая закреплена абсолютно жесткой крепью так, что породные стенки и крепь по всему контуру жестко сцеплены друг с другом. Напряженно-деформированное состояние упругой плоскости с отверстием состоит из суммы основных напряжений, обусловленных напряженным состоянием плоскости без отверстия, и дополнительных напряжений, обусловленных наличием отверстия. При этом решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния упруго-ползучего массива с моментными напряжениями вокруг незакрепленной некруговой горизонтальной выработки сводится к решению последовательности аналогичных задач для круговой выработки методом малого параметра. Суть этого метода заключается в том, что функции напряжений раскладываются в числовые ряды по степеням параметра, который характеризует отклонение формы выработки от круга. Получены численные результаты по определению напряженно-деформированного состояния горной породы при воздействии обычных и моментных напряжений на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением в условиях ползучести. Расчеты по определению горного давления на контуре выработки от обычных и моментных напряжений проведены для анализа поведения алевролита с течением времени $t = 120$ часов и $t = 600$ часов в полярных координатах. Построенные эпюры искомого моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь в нулевом и первом приближении при $t = 120$ и $t = 600$ часов показывают, что с течением времени оно усиливается, поэтому в зонах максимального роста требуется ее усилить для повышения устойчивости.

Түйін сөздер: напряжения, деформации, крепь, конформное отображение, горное давление, ползучесть, обрушение.

DOI: <https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2024/1.1>

2000 Mathematics Subject Classification: 74A05; 74A10.

Если нетронутая среда до нарушения ее сплошности находится в состоянии напряженного равновесия, то после возведения в ней подземной выработки она теряет свою устойчивость в результате смещений пород вокруг конструкции. На подземный объект оказывается внешнее давление от действия массы вышележащих горных пород, которое может привести к его обрушению. Наибольшие смещения и деформации происходят на контуре подземной выработки и вокруг нее, а по мере удаления от нее они затухают. Для предотвращения обрушения кровли и стенок выработки и обеспечения безопасности ее эксплуатации в течение всего срока службы возводятся искусственные сооружения, называемые горной крепью. Горная крепь - это искусственное строительное сооружение, которое служит для укрепления окружающих горных пород и сохранения заданных размеров и формы подземных сооружений с целью защиты от обрушений [1].

Конструкция крепи и ее материал зависят от площади и формы поперечного сечения горной выработки, горно-геологических условий, величины и характера давления породы, срока службы и других факторов [2]. Несущие крепи служат для восприятия нагрузки от горного давления и должны удовлетворять таким требованиям, как прочность - способность выдерживать давление горных пород в течение всего срока ее эксплуатации; огнестойкость, коррозионная стойкость, сейсмостойкость, ремонтпригодность и др. На рисунке 1 показан укрепленный подземный тоннель в массиве горных пород.



Рисунок 1 – Укрепленный подземный тоннель в массиве горных пород

Проведенные исследования показали, что давление ползущих горных пород на крепь определяется величиной радиального напряжения на контуре выработки, а его величина с развитием свойств ползучести с течением времени растет. Характер горного давления показывает его однородность, напряжения сжимающие, а вертикальное давление более чем в два раза превышает боковое. Полученные результаты указывают на наиболее неустойчивые области массива горных пород, в которых следует провести дополнительные мероприятия по усилению крепи из-за возрастания риска ее обрушения. При этом моментные напряжения оказывают дополнительные воздействия на абсолютно жесткую крепь.

Постановка задачи

Пусть в однородном упруго-ползучем изотропном массиве горных пород с моментными напряжениями на глубине H от дневной поверхности пройдена горизонтальная выработка поперечного эллиптического сечения. Она закреплена абсолютно жесткой (недеформируемой) крепью той же формы так, что породные стенки и крепь по всему контуру жестко сцеплены друг с другом. Требуется определить компоненты обычных и моментных напряжений в крепи и горном массиве в окрестности выработки в условиях ползучести.

Такой массив вокруг некруговой выработки моделируется в условиях плоской деформации бесконечной изотропной упругой невесомой плоскостью с несимметричными тензорами напряжения, ослабленной отверстием заданной формы со впаиванной в него жесткой шайбой. Расчетная схема задачи показана на рисунке 2.

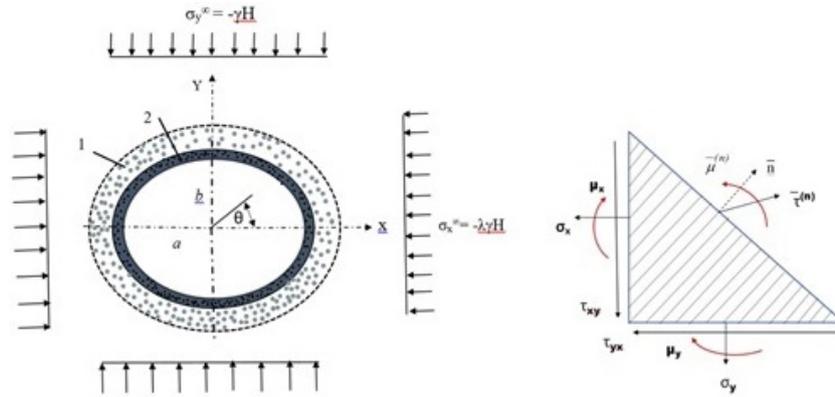


Рисунок 2 – Расчетная схема задачи.

Метод решения задачи

При помощи отображающей функции $z(\zeta) = R(\zeta + \varepsilon\zeta^{-1})$ конформно отобразим всю бесконечную область вне некругового отверстия на внешность единичного круга в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$ при условии (1):

$$1 + \varepsilon\phi(\zeta) \neq 0 \quad \text{при } |\zeta| \geq 1, \quad (1)$$

где ρ и θ - полярные координаты; i - мнимая единица; ε - малый числовой параметр, находящийся в пределах $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ и характеризующий отклонение заданного отверстия от кругового. Параметры ε и R находятся по формулам (2): где a и b - полуоси эллипса. Для решения задачи в отображенной области ставятся условия (3)-(5).

1. Начальные условия:

$$v_\rho^\pi + iv_\theta^\pi = 0, \quad \omega_{\rho\theta}^\pi = 0, \quad \text{при } t = 0 \quad (3)$$

2. Граничные условия: на бесконечности ($z \rightarrow \infty$) действуют усилия, равные усилиям основного напряженного состояния:

$$\sigma_\xi^\infty(t) = -\lambda\gamma H, \quad \sigma_\eta^\infty(t) = -\gamma H, \quad \tau_{\xi\eta}^\infty(t) = \tau_{\eta\xi}^\infty = 0, \quad \mu_\xi^\infty(t) = \mu_\eta^\infty(t) = 0 \quad (4)$$

3. Условия сопряжения:

$$v_\rho^p + iv_\theta^p = 0, \quad \omega_{\rho\theta}^p = 0 \quad \text{при } \rho = 1 \quad (5)$$

где индекс " π " означает ползучесть; t - время; $\lambda = \frac{v}{1-v}$ - коэффициент бокового давления;

$v_\rho^\pi, iv_\theta^\pi, \omega_{\rho\theta}^\pi$ - соответственно компоненты перемещения и вращения, обусловленные ползучестью горных пород;

$\sigma_\xi^\infty(t), \sigma_\eta^\infty(t), \tau_{\xi\eta}^\infty(t), \tau_{\eta\xi}^\infty, \mu_\xi^\infty(t), \mu_\eta^\infty(t)$ - компоненты обычных и моментных напряжений соответственно.

Напряженное состояние упругой плоскости с отверстием складывается из компонентов основных напряжений, обусловленных напряженным состоянием плоскости без отверстия,

и компонентов дополнительных напряжений, обусловленных наличием отверстия. Тогда функции напряжений, согласно идее работы [3], можно представить в виде суммы (6):

$$\varphi(\zeta) = \varphi^0(\zeta) + \varphi^{00}(\zeta), \psi(\zeta) = \psi^0(\zeta) + \psi^{00}(\zeta), P(\zeta, \bar{\zeta}) = P^0(\zeta, \bar{\zeta}) + P^{00}(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (6)$$

где $\varphi^0(\zeta)$, $\psi^0(\zeta)$, $P^0(\zeta, \bar{\zeta})$ – функции напряжений Колосова-Мухелишвили основного напряженного состояния, характеризующего нетронутый массив; $\varphi^{00}(\zeta)$, $\psi^{00}(\zeta)$, $P^{00}(\zeta, \bar{\zeta})$ – функции напряжений дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием выработки. Здесь функция напряжений $P(\zeta, \bar{\zeta})$ – решение известного уравнения Гельмгольца [4] вида (7):

$$\Delta P - c^2 P = 0 \quad (7)$$

где Δ – оператор Лапласа. Из условия (5) следует, что смещения и поворот точек контура L жесткой крепи отсутствуют. Перемещения и вращения, связанные только со свойствами ползучести горного массива, найдем при $\rho = 1$ по формулам (8) согласно работе [3]:

$$v_\rho^{00}(t) + iv_\theta^{00}(t) = v_\rho^{00} + iv_\theta^{00} \\ \omega_{\rho\theta}(t) = \omega_{\rho\theta}^{00}. \quad (7)$$

Обозначим потенциалы для определения компонентов дополнительных напряжений, перемещений и вращения в условиях ползучести горного массива вокруг закрепленной выработки через $f(\zeta, t)$, $g(\zeta, t)$, $N(\zeta, \bar{\zeta}, t)$. Тогда дополнительные перемещения и вращение в упруго-ползучем горном массиве, соответствующие моменту времени t после закрепления выработки, определим через временные операторы \bar{G} , \bar{v} , $\bar{\chi}$ параметров среды G, v, χ , которые вычисляются по формулам (9):

$$\bar{v} = v, \bar{\chi} = \chi \left\{ 1 - \frac{2(1-2v)}{\chi} \beta \mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta) \right\}, \bar{G} = G \left\{ 1 - \frac{3}{2(1+v)} \beta \mathfrak{E}_\alpha^* \left[-\frac{3\beta}{2(1+v)} \right] \right\}, \quad (9)$$

где G – модуль сдвига, v – коэффициент Пуассона, χ – компонента деформаций искривления от моментных напряжений, при этом $\chi = 3 - 4v$.

Согласно гипотезе Ержанова Ж.С. ползучесть горных пород хорошо описывается степенной функцией с ядром наследственности типа Авеля вида $\Omega(t - \tau) = \delta(t - \tau)^{-\alpha}$, где α, δ – параметры ползучести горного массива ($0 < \alpha < 1$) [4]. Однако построение резольвент такого типа весьма затруднительно, поэтому для вычисления интегрального временного оператора дробного порядка Ю.Н. Работнова $\mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta)$ [5] использована аппроксимация М.И. Розовского [6] по формуле (10):

$$\mathfrak{E}_\alpha^*(-\beta) * 1 = \beta^{-1} [1 - \exp(-\omega \beta t^{1-\alpha})], \quad (10)$$

где $\omega = (1 - \alpha)^{(1-\alpha)}$, $\beta = \delta \Gamma(1 - \alpha)$, $(1 - \alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

В результате получим следующую граничную задачу для определения напряжений $f(\zeta, t)$, $g(\zeta, t)$, $N(\zeta, \bar{\zeta}, t)$, при $\rho = 1$ по формуле (11):

$$\bar{\chi} f(\sigma, t) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{f'(\sigma, t)} - \overline{g(\sigma, t)} - \bar{m} \frac{\overline{F'(\sigma, t)}}{\omega'(\sigma)} + \frac{2i}{\omega'(\sigma)} \frac{\partial N}{\partial \bar{\sigma}} = \\ = \frac{\bar{G}}{G} \left[\chi \varphi^{00}(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi^{00}(\sigma)} - m \frac{\overline{\Phi^{00'}(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} + \frac{2i}{\omega'(\sigma)} \frac{\partial P}{\partial \bar{\sigma}} \right] \quad (11)$$

$$Jm \left[(1 + \bar{\chi}) \frac{f'(\sigma, t)}{\omega'(\sigma)} + \frac{ic^2}{2} N(\sigma, \bar{\sigma}, t) \right] = \frac{\bar{G}}{G} Jm \left[(1 + \chi) \frac{\varphi^{00'}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{ic^2}{2} P(\sigma, \bar{\sigma}) \right]$$

где Jm – мнимая часть выражения; символ " ' " означает производную функции;

$$F'(\sigma, t) = \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{f'(\sigma, t)}{\omega'(\sigma)} \right\};$$

$$\bar{m} = 8(1 - \bar{v})l^2;$$

$l^2 = \frac{G^*}{G}$, G^* - изгибно-сдвиговой модуль. Искомые функции $f(\sigma, t)$, $g(\sigma, t)$, $N(\sigma, \bar{\sigma}, t)$ представим в виде рядов по степеням малого параметра ε , характеризующего степень отклонения формы выработки от круга по формулам (12):

$$f(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_k(\sigma, t), \quad g(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_k(\sigma, t), \quad N(\sigma, \bar{\sigma}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N(\sigma, \bar{\sigma}, t). \quad (12)$$

Мы ограничимся нулевым и первым приближением и получим разложение по формулам (13):

$$\begin{aligned} f(\sigma, t) &= f_0(\sigma, t) + \varepsilon f_1(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(0)}(t) \sigma^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \sigma^{-k}, \\ g(\sigma, t) &= g_0(\sigma, t) + \varepsilon g_1(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(0)}(t) \sigma^{-k} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \sigma^{-k}, \\ N(\sigma, \bar{\sigma}, t) &= N_0(\sigma, \bar{\sigma}, t) + \varepsilon N_1(\sigma, \bar{\sigma}, t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k^{(0)}(t) \sigma^k + \varepsilon \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_k^{(1)} \right) K_k(cR) \sigma^k, \end{aligned} \quad (13)$$

где $K_k(cR)$ - функция Макдональда 2-го рода k -го порядка;

$c_k^{(0)}$, $d_k^{(0)}$, $n_k^{(0)}$ - неизвестные коэффициенты для нулевого приближения;

$c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$, $n_k^{(1)}$ - неизвестные коэффициенты для первого приближения.

В дальнейшем будем считать, что они зависят от времени.

Введем обозначения $X = 1 - \chi - \chi cR \frac{K_0}{K_1}$ и найдем выражения для классических и моментных напряжений.

1) *Нулевое приближение.*

В результате преобразований функции напряжений для нулевого приближения представим в виде формул (14):

$$\begin{aligned} f_0(\zeta, t) &= -\frac{\Gamma'}{1+F} \frac{\bar{G}}{G} \frac{X}{\bar{X}} \zeta^{-1}, \quad g_0(\zeta, t) = -2\Gamma \frac{\bar{G}}{G} \zeta^{-1} - \frac{\Gamma'}{1+F} \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}} \zeta^{-1} \\ N_0(\zeta, \bar{\zeta}, t) &= \frac{2\Gamma'}{1+F} \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}} \frac{K_2(cR\rho)}{cK_1(cR)} \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где Γ и Γ' - постоянные, характеризующие распределение напряжений на бесконечности, находятся по формулам (15):

$$\Gamma = -\frac{\gamma H(1+\lambda)}{4}, \quad \Gamma' = -\frac{\gamma H(1-\lambda)}{2}. \quad (15)$$

Вычислим напряжения согласно выражениям (16):

$$\sigma_\rho^{(0)}(t) - i\tau_{\rho\theta}^{(0)}(t) = \frac{f'_0}{R} + \frac{\bar{f}'_0}{R} + \frac{ic^2}{2} N_0 - e^{2i\theta} \left\{ \zeta \frac{f''_0}{R} + \frac{g'_0}{R} \frac{m}{R^2} \frac{f'''_0}{R} + \frac{2i}{R^2} N'_0 \right\}. \quad (16)$$

После отделения действительной части получим на контуре единичного круга при $\rho = 1$ выражение (17):

$$\sigma_\rho^{(0)}(t) = \frac{\gamma H \bar{G}}{2G} \left\{ 1 + \lambda - (1-\lambda) \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}(1+F)} \cos 2\theta \right\}. \quad (17)$$

где $F = \frac{8(1-\nu)}{4+c^2R^2+2cRK_0/K_1}$. При $t = 0$ получим выражение (18):

$$\sigma_\rho^{(0)\pi} = \sigma_\rho^{00} = -\frac{\gamma H}{2} \{1 + \lambda - (1-\lambda) \cos 2\theta\}. \quad (18)$$

Напряжения, обусловленные только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (19):

$$\sigma_\rho^{(0)\pi}(t) = -\frac{\gamma H(1+\lambda)}{2} \left(1 - \frac{\bar{G}}{G}\right) \frac{\gamma H(1-\lambda)}{2} \left(1 - \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{X} - \chi + X - F\bar{X}}{\bar{X}(1+F)}\right) \cos 2\theta. \quad (19)$$

Моментные напряжения вычисляются согласно формуле (20):

$$\mu_{\theta}^{(0)}(t) + i\mu_{\rho}^{(0)}(t) = e^{i\theta} \left\{ \frac{m}{R^2} f_0'' + \frac{2i}{R} N_0' \right\}. \quad (20)$$

После отделения действительной части получим на контуре единичного круга при $\rho = 1$ выражение для окружного моментного напряжения (21):

$$\mu_{\theta}^{(0)}(t) = \gamma H R (1 - \lambda) \frac{\bar{G}}{G} \frac{F}{1 + F} \cos 2\theta. \quad (21)$$

При $t = 0$ получим выражение (22):

$$\mu_{\theta}^{(0)}(t) = \gamma H R (1 - \lambda) \frac{F}{1 + F} \left\{ 1 - \frac{\bar{G}}{G} \right\} \cos 2\theta. \quad (22)$$

Моментное напряжение, обусловленное только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (23):

$$\mu_{\theta}^{(0)\pi}(t) = \gamma H R (1 - \lambda) \frac{F}{1 + F} \cos 2\theta. \quad (23)$$

2) *Первое приближение.*

Искомые функции напряжений в первом приближении представлены в виде рядов в формуле (11). Функцию $N_1(\theta, \bar{\theta}, t)$ найдем из дифференциального уравнения (24):

$$\Delta N_1 - c^2 R^2 N_1 = - \frac{2\Gamma' \bar{G}}{1 + F} \frac{c^2 R^2}{G c K_1(cR)} \frac{\bar{\chi} + F\bar{X} - \chi}{\bar{X}} \frac{K_2(cR\rho)}{\rho^2} \sin 4\theta, \quad (24)$$

где $K_n(cR\rho)$ -модифицированная функция Бесселя второго рода n -го порядка от мнимого аргумента (функция Макдональда) [7].

Решение этого уравнения можно представить в виде суммы $N_1 = N_{11} + N_{12}$, где N_{12} - решение однородного уравнения, а N_{11} - решение уравнения (24) и равно выражению (25):

$$N_{11} = \frac{\Gamma' \bar{G}}{1 + F} \frac{c^2 R^2}{G 6K_1(cR)} \frac{\bar{\chi} + F\bar{X} - \chi}{\bar{X}} K_2(cR\rho) \sin 4\theta. \quad (25)$$

Для облегчения вычислений представим слагаемое N_{12} в виде ряда (26):

$$N_{12} = n_0^{(1)} K_0(cR) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ n_k^{(1)} \theta^k + \bar{n}_k^{(1)} \theta^{-k} \right\} K_k(cR\rho). \quad (26)$$

Нормальные напряжения на контуре единичного круга при $\rho = 1$, обусловленные только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (27):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)\pi}(t) = & -\frac{\gamma H}{2} \left\{ (1 - \lambda) \left(1 - \frac{\bar{G}}{G} \right) + (1 - \lambda) \frac{\bar{G}}{G} \frac{\bar{\chi} - \chi}{\bar{X}} \frac{cR K_2}{K_1} \cos 2\theta - (1 - \lambda) \left[1 - \frac{\bar{G}}{G(1 + F)} \left\langle \frac{X}{\bar{X}} \right. \right. \right. \\ & - 4(1 - v) \left(\frac{R_2 Y}{R_1 \bar{Y}} R_3 K_3 \right) + F \left(\frac{c^2 R^2}{4} - \frac{cR K_0}{2K_1} \right) - \frac{12(1 - v) R_2 \bar{\chi} - \chi}{R_1 \bar{Y}} + \frac{\bar{\chi} - \chi}{\bar{X}} + \\ & \left. \left. \left. + \frac{\bar{\chi} - \chi}{\bar{X} \bar{Y}} \frac{c^3 R^3}{4} (1 + \chi) \left(\frac{K_4 K_4 - 3K_1}{K_3} + \frac{K_2}{2K_1} - \frac{K_2}{K_1} \frac{12}{c^2 R^2} \right) \right] \right\} \cos 4\theta, \quad (27) \end{aligned}$$

где $R_1 = 1 + \frac{96(1-v)K_3}{c^2 R^2 (K_3 + K_5)}$, $R_2 = \frac{K_1 - \frac{2}{cR} K_2}{K_3 + K_5} + \frac{(\frac{24}{c^2 R^2} - 1) K_3}{K_3 + K_5}$, $R_3 = \frac{1 + \frac{24}{c^2 R^2} (4(1-v) \frac{R_2}{R_1} - 1)}{K_3 + K_5}$.

Моментное окружное напряжение, обусловленное только свойствами ползучести горных пород, вычисляются согласно выражениям (28):

$$\begin{aligned} \mu_{\theta}^{(1)}(t) = & -\frac{\gamma H R}{2} \left(1 - \frac{\bar{G}}{G} \right) \frac{F}{1 + F} \times \\ & \times \left\{ 1 - \lambda + 2(1 + \lambda) \cos 2\theta + (1 - \lambda) \left[1 + \frac{c^2 R^2 R_2 K_1}{6(K_1 + K_3) R_1} \right] \cos 4\theta \right\}. \quad (28) \end{aligned}$$

3) *Полные напряжения.*

Таким образом, горное давление на контуре жесткой крепи, вызванное обычными упругими и моментными напряжениями, равно сумме нулевого и первого приближения по формулам (29):

$$\begin{cases} Q = Q^{(0)} + \varepsilon Q^{(1)} \\ M = M^{(0)} + \varepsilon M^{(1)} \end{cases} \quad (29)$$

Горное давление на жесткую крепь, вызванное обычными упругими и моментными напряжениями в нулевом и первом приближении при $\rho = 1$ равно соответственно выражениям в формулах (30):

$$\begin{cases} Q^{(0)} = -\sigma_{\rho}^{(0)\pi}, & Q^{(1)} = -\sigma_{\rho}^{(1)\pi} \\ M^{(0)} = -\mu_{\theta}^{(0)\pi}, & M^{(1)} = -\mu_{\theta}^{(1)\pi}. \end{cases} \quad (30)$$

В заключение расшифруем временные операторы, входящие в выражения (19), (23), (27), (28) по формулам (31):

$$\begin{aligned} \bar{X} &= X \left\{ 1 + \frac{2(1-2\nu)}{X} (1 + cRK_0/K_1) \beta \Theta^*_{\alpha}(-\beta) \right\}, \\ \bar{Y} &= Y \left\{ 1 - \frac{2(1-2\nu)}{Y} (3 - cRK_4/K_3) \beta \Theta^*_{\alpha}(-\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Результаты

Численные расчеты для определения напряженно-деформированного состояния горных пород от воздействия обычных и моментных напряжений на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением, проведены при следующих данных: $E = 0,62 \times 10^{10}$ Мпа, $\nu = 0,2$, $\alpha = 0,726^\circ$, $\delta = 0,0094$ сек α^{-1} , $\lambda = 0,25$, $cR = 3$. Функции Макдональда второго рода взяты из монографии Ватсона Г.Н. [8]: $K_0 = 0,0347$, $K_1 = 0,0402$, $K_3 = 0,1222$, $K_4 = 0,3059$, $K_5 = 0,9378$, $K_6 = 3,4318$. Полярный угол берется в пределах $0 \leq \theta \leq 2\pi$, малый параметр $\varepsilon = 1/3$.

В таблице 1 показаны результаты расчетов по формулам (18), (26), (28) и (29) для горного давления (полного, в нулевом и первом приближении), вызванного действием обычных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением, при $\varepsilon = 1/3$, $t = 120$ часов и $t = 600$ часов.

Таблица 1 – Горное давление, вызванное действием обычных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением.

θ , градус	$Q^{(0)}/\gamma H$		$Q^{(1)}/\gamma H$		$Q/\gamma H$ при $\varepsilon = 1/3$	
	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.
0	0.1633	0.2042	0.2316	0.2638	0.2405	0.2922
15	0.1928	0.2415	0.2871	0.3404	0.2885	0.3549
30	0.2732	0.3432	0.3830	0.4763	0.4009	0.5019
45	0.3831	0.4821	0.3821	0.4891	0.5105	0.6451
60	0.4931	0.6210	0.2290	0.3020	0.5694	0.7217
75	0.5735	0.7228	0.0204	0.0384	0.5803	0.7355
90	0.6030	0.7600	-0.0763	-0.0849	0.5775	0.7317
105	0.5735	0.7228	0.0204	0.0384	0.5803	0.7355
120	0.4931	0.6210	0.2290	0.3020	0.5694	0.7217
135	0.3831	0.4821	0.3821	0.4891	0.5105	0.6451
150	0.2732	0.3432	0.3830	0.4763	0.4009	0.5019
165	0.1928	0.2415	0.2871	0.3404	0.2885	0.3549
180	0.1633	0.2042	0.2316	0.2638	0.2405	0.2922

Наибольший интерес вызывают распределения горного давления, вызванного действием моментных напряжений, поскольку обычные напряжения подробно описаны в предыдущих работах авторов [9].

В таблице 2 показаны результаты расчетов по формулам (22), (27), (28) и (29) для горного давления (полного, в нулевом и первом приближении), вызванного действием моментных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением, при $\varepsilon = 1/3$, $t = 120$ часов и $t = 600$ часов.

Таблица 2 – Горное давление, вызванное действием моментных напряжений, на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением.

θ , градус	$M^{(0)}/\gamma HR$		$M^{(1)}/\gamma HR$		$M/\gamma HR$ при $\varepsilon = 1/3$	
	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.	$t = 120$ ч.	$t = 600$ ч.
0	-0.1197	-0.1506	-0,3191	-0,4015	-0,2261	-0,2844
15	-0.1036	-0.1304	-0,2625	-0,3303	-0,1912	-0,2405
30	-0.0598	-0.0753	-0,1297	-0,1632	-0,1031	-0,1297
45	0.0000	0.0000	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000
60	0.0598	0.0753	0,0698	0,0878	0,0831	0,1046
75	0.1036	0.1304	0,0830	0,1045	0,1313	0,1652
90	0.1197	0.1506	0,0799	0,1005	0,1463	0,1841
105	0.1036	0.1304	0,0830	0,1045	0,1313	0,1652
120	0.0598	0.0753	0,0698	0,0878	0,0831	0,1046
135	0.0000	0.0000	-0,0001	-0,0001	0,0000	0,0000
150	-0.0598	-0.0753	-0,1297	-0,1632	-0,1031	-0,1297
165	-0.1036	-0.1304	-0,2625	-0,3303	-0,1912	-0,2405
180	-0.1197	-0.1506	-0,3191	-0,4015	-0,2261	-0,2844

На рисунке 3 представлены эпюры искомого полного, в нулевом и первом приближении моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь с учетом ее сцепления с породными стенками при $\varepsilon = 1/3$ и $t = 120$. Для построения графиков использованы возможности построения графиков функций онлайн с помощью инструментов сервиса <http://grafikus.ru/> [10].

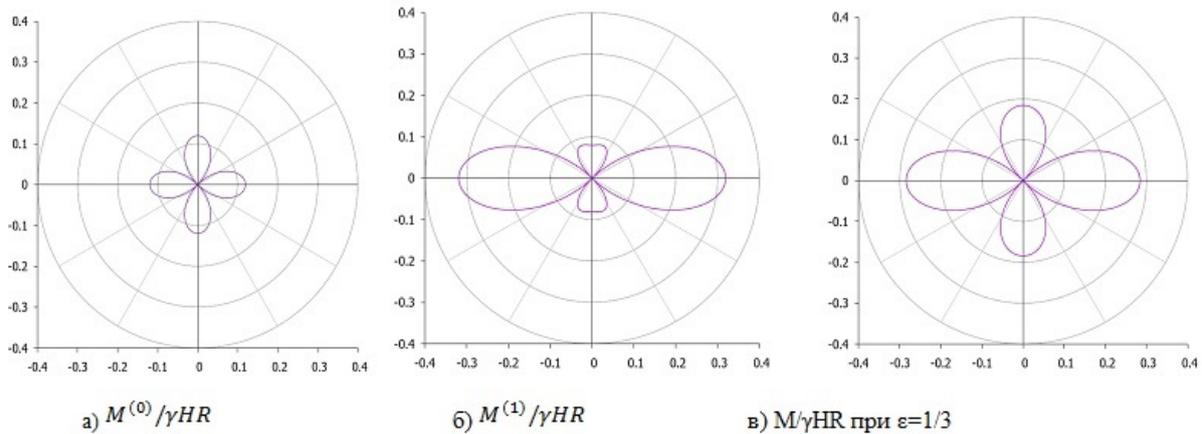


Рисунок 3 – Моментные напряжения при $t = 120$ часов

На рисунке 4 представлены эпюры искомого полного, в нулевом и первом приближении моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь с учетом ее сцепления с породными стенками при $\varepsilon = 1/3$ и $t = 600$ часов [10].

Выводы

Катастрофические проявления могут наступить даже под малым воздействием негативных факторов типа обледенения грунта, каких-либо технологических вблизи подземной конструкции, нарушений эксплуатации таких объектов [11]. Такие неустойчивые зоны требуют еще большего усиления укрепляющих работ, чтобы снизить риск возможных

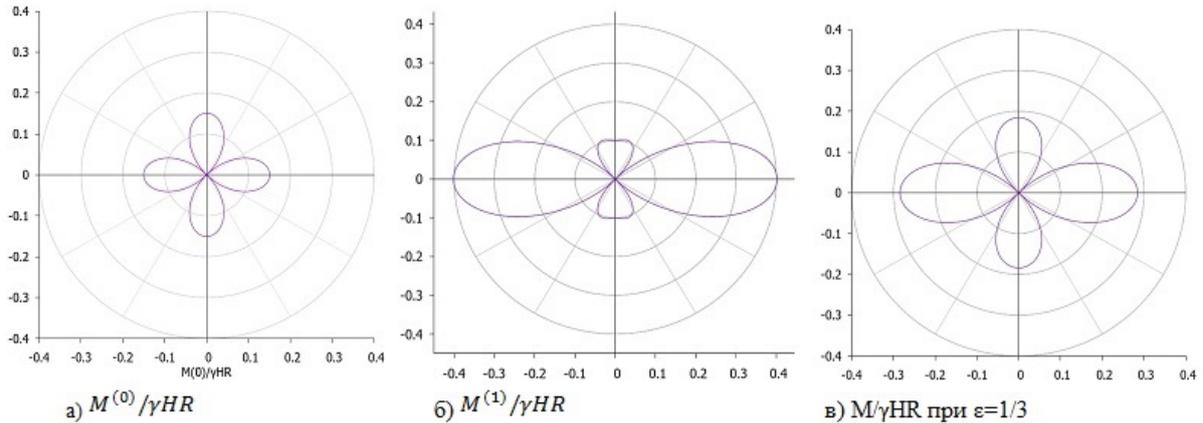


Рисунок 4 – Моментные напряжения при $t = 600$ часов

несчастных случаев на производстве, которые могут привести как к материальному ущербу, так и к человеческим жертвам.

На рисунках 3 и 4 можно увидеть, что если качественная картина распределения моментных напряжений при $t = 120$ и $t = 600$ часов не изменилась, то их количественное изменение находится в пределах от 25% в нижних точках до 28% в верхних точках контура. Это свидетельствует о том, что с течением времени величина давления на крепь усиливается.

Моментные напряжения в нулевом приближении симметричны относительно оси OY , при $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$, $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$, $315^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ массив испытывает растяжение, при $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$, $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$ массив испытывает сжатие. С течением времени они возрастают на 25 – 30%.

Характер распределения моментного горного давления в первом приближении совпадает с распределением обычного горного давления, но массив вначале находится под воздействием деформации растяжения, а затем сжатия. С течением времени величина моментного горного давления в первом приближении возрастает на 25 – 30%.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что полученные результаты могут иметь практическое применение при принятии управленческих решений по усилению кровли штолен и штреков, проведенных в горных массивах и вызывающих нарушение их сплошности и ослабление свойств непрерывности. Угроза обрушений возникает в областях наибольшего горного давления, где подземная выработка испытывает максимальные деформации.

Вклад каждого автора в работу

Аканова К.М. предложила постановку задачи об определении напряженно-деформированного состояния упруго-ползучего массива с моментными напряжениями вокруг незакрепленной некруговой горизонтальной выработки.

Мырканова А.А. построила алгоритм решения поставленной задачи посредством разложения функции напряжений в числовой ряд по степеням малого параметра, который показывает степень отклонения формы некруговой выработки от круга единичного радиуса.

Ластовецкий А.Л. представил численные результаты по определению напряженного-деформированного состояния горной породы при воздействии обычных и моментных напряжений на контуре выработки, закрепленной абсолютно жесткой крепью со сцеплением в условиях ползучести.

Шохинова Ш.М. провела построение эпюр полного обычного и моментного горного давления на абсолютно жесткую крепь в условиях ползучести горного массива с течением времени, а также в нулевом и первом приближении.

Список литературы

- 1 ГОСТ Р 58871-2020 Горное дело. Крепь горных выработок. Термины и определения.
- 2 Нестерова С.Ю. Основы горного дела. (Общий курс. Строительная геотехнология): курс лекций. - Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2017. - 100 с.
- 3 Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. - Алма-Ата: Наука, 1964. - 175 с.
- 4 Попов А.И., Попов И.Ю. Основные уравнения математической физики: Учебное пособие. - СПб: Университет ИТМО, 2020. - 200 с.
- 5 Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. - Москва: Наука, 1977. - 318 с.
- 6 Розовский М.И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. - 1959. - № 5. - С. 109-116.
- 7 Баденко В.Л., Баденко Г.В. Специальные разделы высшей математики. Математическая физика: учеб. пособие, 2014. - 55 с.
- 8 Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть I. Москва: ИЛ, 1949.
- 9 Kulshat Akanova, Assam Myrkanova, Anar Zhumakhanova. Mathematical and computer modeling of critical areas of loss of stability of complex systems // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. - 2022. - № 14. P. 5376-5386.
- 10 Online charting service. Electronic resource: <http://grafikus.ru/>. Дата обращения: 11.03.2024.
- 11 Murray, Stacey R. The Rise and Fall of Catastrophe Theory. Electronic resource: www.encyclopedia.com. Available at: 02.11.2021.

К.М. Аканова¹, А.М. Мырканова², А.Л. Ластовецкий³, А.М. Шохина⁴

^{1,2} Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаев, 2, Астана, 010008, Қазақстан

³ Дублин университетінің колледжі, Belfield, 4, Дублин, Ирландия

⁴ Қарағанды Қазтұтынуодағы университеті, Академическая, 9, Қарағанды, Қазақстан

Моменттік кернеулері бар тау массасындағы абсолютті қатты төсеммен бекітілген эллиптикалық жұмыстың орнықтылығы

Аннотация: Жер асты құрылымын қатты тау жыныстары массивінде жүргізу оның үздіксіздік қасиетін бұзады және жұмысшылардың өміріне қауіп төндіретін, сонымен қатар материалдық және қаржылық зиян келтіретін оның құлауына әкелуі мүмкін. Қазіргі уақытта жерасты құрылымдары бар тау жыныстарының кернеулі-деформациялық күйін анықтаудың классикалық мәселесін шешудің көптеген әдістері жасалған. Дегенмен, жер асты жұмыстарының айналасындағы моменттік кернеулері бар тау жыныстарының кернеулі-деформациялық күйін сипаттайтын біртұтас теория жоқ, өйткені тапсырма таужыныс массасының сығылу-кернеу және ығысу сияқты деформацияларын басқа да қиындықтар туындағанды, иілу және айналу деформациясын есептеу үшін қажет болады. Бұл мақалада тау жыныстарының қабырғалары мен қаптамалары бір-бірімен бүкіл контур бойынша қатты байланысатындай абсолютті қатты төсеммен бекітілген сусымалы жағдайда моменттік кернеулері бар тау жынысы массасындағы эллиптикалық шахтаның иілу аймақтарын анықтау мәселесін шешу ұсынылады. Саңылауы бар серпімді жазықтықтың кернеулі-деформациялық күйі саңылаусыз жазықтықтың кернеулі күйінен туындаған негізгі кернеулер мен саңылау болған кезде пайда болатын қосымша кернеулердің қосындысынан тұрады. Бұл ретте бекітілмеген шеңберлі емес горизонталь жұмысының айналасындағы моменттік кернеулері бар серпімді-суймалы массаның кернеулі-деформациялық күйін анықтау есебінің шеңберлі жұмыс үшін ұқсас есептердің тізбегін кіші параметр әдісімен шешуге әкеледі. Бұл әдістің мәні мынада: кернеулік функциялар шеңберден қазба пішінінің ауытқуын сипаттайтын параметр дәрежесінде сандық қатарға кеңейтіледі. Сусымалы жағдайда адгезиясы бар абсолютті қатты тірекпен бекітілген қазба контурындағы кәдімгі және моменттік кернеулердің әсерінен тау жынысының кернеулі-деформациялық күйін анықтау үшін сандық нәтижелер алынды. Қалыпты және моменттік кернеулерден қазба контурындағы тау жыныстарының қысымын анықтау үшін есептеулер полярлық координаталар бойынша $t = 120$ сағат және $t = 600$ сағат уақыт бойынша алевролиттің мінез-құлқын талдау үшін жүргізілді. $t = 120$ және $t = 600$ сағатта абсолютті қатты тірекке нөлдік және бірінші жуықтаудағы қалаған қосындының құрастырылған диаграммалары оның уақыт өте келе есетінін көрсетеді, сондықтан максималды өсу аймақтарында оны қажет етеді.

Түйін сөздер: кернеулер, деформациялар, тірек, конформды кескіндеу, тау жыныстарының қысымы, жылжуы, құлау.

К.М. Akanova¹, А.М. Myrkanova², А.Л. Lastovetsky³, А.М. Shokhinova⁴

^{1,2} L. N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan

³ University College Dublin - National University of Ireland, Belfield, 4, Dublin, Ireland

⁴ Karaganda university of Kazpotreboyz, Academic str., 9, Karaganda, Kazakhstan

Stability of an elliptical working fixed with absolutely rigid lining in a rock mass with moment stresses

Abstract: Conducting an underground structure in a solid rock mass violates its continuity property and can lead to its collapse, which poses a threat to the lives of workers and also causes material and financial damage. To date, many methods have been developed for solving the classical problem of determining the stress-strain state of rocks with underground structures. However, there is no unified theory for describing the stress-strain state of rocks with moment stresses around underground workings, since the task is complicated by the fact that, in addition to such deformations of the rock mass as compression-tension and shear, it becomes necessary to calculate the deformation of bending and rotation. This article proposes a solution to the problem of determining the buckling zones of an elliptical mine in a rock mass with moment stresses under creep conditions, which is fixed with an absolutely rigid lining so that the rock walls

and lining are rigidly linked to each other along the entire contour. The stress-strain state of an elastic plane with a hole consists of the sum of the main stresses caused by the stressed state of the plane without a hole, and additional stresses caused by the presence of a hole. At the same time, the solution of the problem of determining the stress-strain state of an elastic-creeping mass with moment stresses around an unsecured non-circular horizontal working is reduced to solving a sequence of similar problems for a circular working by the small parameter method. This method expands the stress functions are expanded into numerical series in powers of a parameter that characterizes the deviation of the excavation shape from a circle. Numerical results were obtained to determine the stress-strain state of the rock under the influence of ordinary and moment stresses on the contour of the excavation, secured by an absolutely rigid support with adhesion under creep conditions. Calculations were carried out to determine the rock pressure on the excavation contour from normal and moment stresses were carried out to analyze the behavior of siltstone over time $t = 120$ hours and $t = 600$ hours in polar coordinates. The constructed diagrams of the desired total, in the zero and first approximation, momentary rock pressure on an absolutely rigid support at $t = 120$ hours and $t = 600$ hours show that it increases over time, therefore, in zones of maximum growth it is required to strengthen it to increase stability.

Keywords: stresses, deformations, support, conformal mapping, rock pressure, creep, collapse.

References

- 1 GOST P 58871-2020 Gornoe delo. Krep' gornyh vyrabotok. Terminy i opredeleniya [State standard R. 58871-2020 Mining engineering. Support of mine workings. Terms and definitions] [in Russian].
- 2 Nesterova S.Yu. Osnovy gornogo dela. (Obshnij kurs. Stroitel'naja geotekhnologija): kurs lekcij [Fundamentals of mining. (General course. Construction geotechnology): course of lectures]. Publishing house of Perm. nat. research polytechnic un-ta, 2017. 100 p.
- 3 Yerzhanov Zh.S. Teoriya polzuchesti gornyh porod i ee prilozhenija [The theory of rock creep and its applications]. Alma-Ata, Nauka, 1964. 175 p.
- 4 Popov A.I., Popov I.Yu. Osnovnye uravnenija matematicheskoy fiziki: Uchebnoe posobie [Basic equations of mathematical physics. Tutorial]. St. Petersburg: ITMO University, 2020. 200 p.
- 5 Rabotnov Yu.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdyh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow: Nauka, 1977. 318 p.
- 6 Rozovsky M.I. Nelineiny integral'no-operatornye polzuchesti I zadacha o kruchenii zilindra pri bolshyh uglah krutki [Nonlinear integral-operator equations of creep and the problem of cylinder torsion at large twist angles], Izv. AN SSSR. Mekhanika i mashinostroenie [Izv. Academy of Sciences of the USSR. Mechanics and engineering]. 1959. № 5. P. 109-116.
- 7 Badenko V.L., Badenko G.V. Speziak'nye razdely vyshvej matematiki. Matematicheskay fizika: Uchebnoe posobie [Special sections of higher mathematics. Mathematical Physics: Proc. allowance]. 2014. 55 p.
- 8 Watson G.N. Teoriya besselevykh funkcij [Theory of Bessel functions]. Part I. Moscow: IL, 1949.
- 9 Kulshat Akanova, Assem Myrkanova, Anar Zhumakhanova. Mathematical and computer modeling of critical areas of loss of stability of complex systems // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. - 2022. - № 14. P.p. 5376-5386.
- 10 Online charting service Available at: <http://grafikus.ru/> (Accessed: 11.03.2024).
- 11 Murray, Stacey R. "The Rise and Fall of Catastrophe Theory". www.encyclopedia.com. Retrieved 2 November, 2021.

Сведения об авторах:

Аканова Кульшат Мажитовна - автор для корреспонденции, кандидат физико-математических наук (Ph.D), доцент (ассоциированный профессор) математики, кафедра Математического и компьютерного моделирования, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан. <https://orcid.org/0000-0002-0474-8708>.

Мырканова Асем Азамовна - постдокторант, кафедра Математического и компьютерного моделирования, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан. <https://orcid.org/0000-0002-6378-803X>.

Ластовецкий Алексей Леонидович - доктор физико-математических наук, профессор, Школа компьютерных наук, Колледж университета Дублин - Национальный университет Ирландии, Belfield, 4, Дублин, Ирландия. <https://orcid.org/0000-0001-9460-3897>.

Шохинова Айман Муталиповна - магистр физических наук, Карагандинский университет Казпотребсоюза, ул. Академическая, 9, Караганда, Казахстан. <https://orcid.org/0009-0004-3433-951X>

Information about authors:

Kulshat Akanova - **Corresponding author**, Candidate (Ph.D) of physical and mathematical sciences, Associate Professor of Mathematics, Mathematical and Computer Modeling Department, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-0474-8708>.

Asema Myrkanova - postdoctoral fellow, Mathematical and Computer Modeling Department, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-6378-803X>.

Alexey Lastovetsky - Doctor of physical and mathematical sciences, School of Computer Science, University College Dublin, Belfield str., 4, Dublin, Ireland. <https://orcid.org/0000-0001-9460-3897>.

Aiman Shokhinova - Master of Science in Physics, Karaganda University of Kazpotrebsoyuz, Academic str., 9, Karaganda, Kazakhstan. <https://orcid.org/0009-0004-3433-951X>.

Поступила: 16.06.2023. После редакции: 19.12.2023.

Одобрена: 29.03.2024. Доступна онлайн: 30.03.2024.