*Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 142, №1, P.35-69*
*http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz*

**МРНТИ**: **27.25.19**

Н. Темиргалиев, Ш.К. Абикенова, Ш.У. Ажгалиев, Е.Е. Нурмолдин, Г.Е. Таугынбаева, А.Ж. Жубанышева

*Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н.Гумилева, ул. Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан*
*(E-mail: ntmath10@mail.ru)*

# Эквивалентное сведение задач Компьютерной томографии к разработанной задаче восстановления функций в виде конечной свертки в нормах «гибких» гильбертовых пространств Соболева и Соболева-Радона по схеме Компьютерного (вычислительного) поперечника [1]

**Аннотация:** Компьютерную томографию составляет жизненная потребность без разрушения оболочки знать строение внутренности тела по информации, полученной от его просвечивания. Представленный здесь формат решения этой массово понятной и вездесуще потребной задачи, которая может быть только теоретико-математической с последующей инженерной реализацией, принципиально выражен в установленной авторами в 2019 году приближенной формуле на плоскости с двумерной Декартовой системой координат. В данной статье этот прорыв для всех размерностей доведен до полной неожиданности в эквивалентности фундаментальных задач Компьютерной томографии и как широко известных, так и разработанных в новых содержаниях продолжений задач восстановления функций операторами вида конечной свертки числовых значений сканирования в узлах сетки со специально конструируемыми ядрами:

$$sup\left\{\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^{2}\right)^{-1}Rf\left(\xi_{k}\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_{k}\right)\right)\left(x\right)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)}:f\in W_{2}^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)\right\}\asymp$$

$$\asymp sup\left\{\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f\left(\xi_{k}\right)\Phi(x-\xi_{k})\right\|_{L^{2}(E_{s})}:f\in W_{2}^{\alpha(y)}\left(E_{s}\right)\right\},$$

Как это принято в Математике (в других науках тоже), всякая заявка на прорыв должна быть продемонстрирована в результатах принципиального значения. В полученной эквивалентности рабочая часть оказалась в состоянии достаточной для иллюстративных и, надеемся, фундаментальных выводов готовности по предложенному в 1996 году первым (по списку) автором и наполненному в Казахстане далеко не тривиальным содержанием Компьютерному (вычислительному) поперечнику (К(В)П). Именно, широкий спектр разработок в теории К(В)П мгновенно автоматически приводит к новым теоретического и прямого практического применения продвижениям в Компьютерной томографии, включая аналитическую выразимость в явных формулах вычислительного агрегата Томографии через сканированные величины. Среди них также находится вывод о том, что в Компьютерной томографии не существует метода сканирования лучшего, чем преобразование Радона.

**Ключевые слова:** Преобразование Радона, Гильбертово гибкое пространство Соболева, Гильбертово гибкое пространство Соболева-Радона, формула順 Планшереля для преобразования Радона, эквивалентность задач восстановления функций по своим нормам.

[1]Статья выполнена в рамках грантового финансирования по линии МОН РК, проект № AP09260484

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/1.3

**2000 Mathematics Subject Classification: 44A12, 41A99**

**Новая парадигма Компьютерной томографии в понятиях, формулах и алгоритмах.** Предлагается прорывная идея, представляющая собой фундаментальное изменение в традиционных подходах к Компьютерной томографии.

*Преобразование Радона* функции $f(x)$ есть оператор

$$Rf(x) := \int_{y \in R_x^{s-1}} f(y)\, dy =: R(f(y))(x).$$

В многомерной теории Компьютерной томографии естественным образом и неизбежно возникли новые виды гильбертовых пространств Соболева на основе интегралов по гиперплоскостям $R_x^{s-1}$ и цилиндрам как прямого произведения единичной сферы $S^{s-1}$ и числовой прямой $R^1$, специальным образом по формулам Планшереля соединяющих преобразование Радона $Rf$ как инструмента получения информации от сканируемого объекта с его искомой плотностью $f$.

На множестве $R^s \backslash \{0\}$ задаются положительные непрерывные функции $\alpha(y) = \alpha(y_1, ..., y_s)$ и $\rho(y) = \rho(y_1, ..., y_s)$ такие, что $\alpha(y_1, ..., y_s) \to +\infty$ и $\rho(y_1, ..., y_s) \to +\infty$ при $y_j \to +\infty$ и фиксированных остальных переменных, при этом между собой связанные условием

$$\rho(y_1, ..., y_s) = o(\alpha(y_1, ..., y_s))\, (y_1 \to +\infty, \ldots, y_s \to +\infty).$$

*Гильбертово гибкое пространство Соболева* $W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ – это множество функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} := \int_{R^s} \alpha^2(y) \left| \int_{R^s} f(x) e^{-2\pi i \langle y, x \rangle} dx \right|^2 dy < +\infty, \quad W_2^0(R^s) \equiv L^2(R^s).$$

На цилиндре $Z := S^{s-1} \times R^1$ определяется *Гильбертово гибкое пространство Соболева-Радона* $W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1} \times R^1\right)$, как множество всех функций $g(\theta, t)$, для которых конечна норма

$$\|g\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1} \times R^1)} := \int_{S^{s-1}} \int_{R^1} \alpha^2(t\theta) \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta, \tau) e^{-2\pi i t \tau} d\tau \right|^2 d\theta dt.$$

Основной рабочий инструмент – *Формула Планшереля для преобразования Иоганна Радона* (такое название было дано Израилем Моисеевичем Гельфандом в монографии 1965 года, само равенство в числовом исполнении было получено приблизительно в 1960 году Юрием Григорьевичем Решетняком в неопубликованной статье, под вывеской *Обобщенная формула Решетняка* самая широкая числовая версия была установлена В.А. Шарафутдиновым в 2021 году) состоит в равенстве

$$\sqrt{2}\, \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\left(y_1^2 + \cdots + y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)}.$$

Справедливо *эффективно работающее соотношение* $\left(E_s \equiv \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s\right)$

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)} \le 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \Phi(x - \xi_k) \right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\left(y_1^2 + \cdots + y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)} \le 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} f(\xi_k) R(\Phi(y - \xi_k))(x) \right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\left(y_1^2 + \cdots + y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)},$$

сводящее всю проблематику Компьютерной томографии к Теории восстановления функций конечными свертками в гильбертовых пространствах Соболева.

При этом наиболее приспособленным *к использованию известных и формированию направлений к получению новых результатов по* $L^2(E_s)$ *- приближениям с установлением неулучшаемости по всевозможной линейной информации* является его частный случай

$$\rho(y) = \left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}} (\rho \geq 0),$$

$$\|f\|_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \overset{\rho=0}{=} \|f\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)},$$

$$\|f\|^2_{W_2^{\rho}(R^s)} \equiv \|f\|^2_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}}(R^s)} =$$

$$= \int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{\rho}\left|\hat f(y)\right|^2 dy \overset{\rho=0}{\Rightarrow} \int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{0}\left|\hat f(y)\right|^2 dy = \int_{R^s}\left|\hat f(y)\right|^2 dy = \|f\|^2_{L^2(R^s)},$$

с формулировкой

$$\inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N - \textit{все возможные линейные} \\ \textit{функционалы над } W_2^{\alpha(y)}(E_s), \quad \varphi_N}} \sup_{f\in W_2^{\alpha(y)}(E_s)} \|f(x) - \varphi_N(l_1(f),\ldots,l_N(f);x)\|_{L^2(E_s)} \ll$$

$$\ll \inf_{\xi_k\in E_s (k=1,\ldots,N),\ \Phi: E_s\to R^1}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\leq 1}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)} \asymp$$

$$\asymp \inf_{\xi_k\in E_s (k=1,\ldots,N),\ \Phi: E_s\to R^1}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\leq 1}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} R^{-1} f(\xi_k) R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \ll$$

$$\ll \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\leq 1}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\leq 1}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\leq 1}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k)\int_{y\in R_x^{s-1}}\Phi(y-\xi_k)\,dy\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} =$$

$$\overset{\substack{x=t\theta, \\ \xi_k = t_k\theta_k}}{=} \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\leq 1}\left(\int_{S^{s-1}\times R^1} t^{s-1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\tau\theta) - \sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1} Rf(t_k\theta_k)\int_{y\in R_{\tau\theta}^{s-1}}\Phi(y-t_k\theta_k)\,dy\right]d\tau\right|^2 dtd\theta\right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\leq 1}\left\|f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}.$$

Практические рекомендации инновационного характера следующие. В соответствии с Математической моделью экспертируемого объекта предлагается использовать прямые формулы Компьютерного сканирования, в которых по наперед заданной точности из Теоремы восстановления находится количество узлов, где необходимо провести сканирование. Тогда соответствующий вычислительный агрегат превращается в алгоритм, с названной точностью обращающейся в искомую плотность объекта. В самом алгоритме записаны точки, в которых нужно провести сканирование и вся процедура как по этим полученным числовым данным вычислить плотность в любой точке.

Если изучаемые явления описываются

$1^0$. Классами Соболева $W$ и Никольского-Бесова $B$, то сканирование производится в узлах равномерной сетки:

$$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\\ k_j=1,...,n\,(j=1,...,s)}} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s\\ -n\le m_j\le n\ \ (j=1,\ldots,s)}} \int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y-\frac{k}{n}\right)\right)dy$$

$2^0$. Классами Коробова $E$, Соболева $SW$ и Никольского-Бесова-Аманова $SB$, то сканирование производится в узлах

– сетки Кайрата Шерниязова в виде линейной комбинации сеток Коробова

$$\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{1}{detA_{n,\tau}} \sum_{k\in K(n,\tau)} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right) \sum_{m\in\rho(\tau)} \int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y-k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\right)dy$$

– сетки типа Смоляка, порождаемые Методом тензорных произведений функционалов

$$\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega\subset Z^s_{\nu_0}} \frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \int_{y\in R_x^{s-1}} \left\{\prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1} \left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] \exp\left(2\pi i n_j\left(y_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right)\right\}dy.$$

В доступной для нас научной литературе по Компьютерной томографии не были обнаружены такого сорта приближения к искомой плотности $f(x)$ в виде конечной свертки значений $\left(R^2\right)^{-1}$ – образа преобразования Радона $Rf$ в узлах сетки с конкретным ядром, подвергшимся преобразованию Радона. Однако здесь составляющая предмет Вычислительной математики замена сложного объекта на вычислимый абсолютно бесполезна, пока не будет достигнута приемлемая в конкретном случае точность – так $1 = 100$ с погрешностью $100 - 1 = 99$ и, вообще, $a = b$ с погрешностью $|a-b|$. Требующиеся оценки возникающих таких погрешностей восстановления дают известные результаты исследований по Компьютерному (вычислительному) поперечнику и ставятся такого же содержания новые задачи.

Внутренняя сила Главного эквивалентного соотношения

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\le 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}$$

оставалась бы нераскрытой только уровня потенциально ожидаемого, если не развитая теория Компьютерного (вычислительного) поперечника в 22 статьях из 28 в Списке литературы, позволившие установить как глубоко самостоятельного значения, так и иллюстративного характера четыре теоремы. Оставшиеся шесть публикаций – это необходимые четыре освещения темы Компьютерной томографии, и ещё по одной – иллюстрационная и вспомогательная.

**Введение.** Основным результатом данной статьи является соотношение эквивалентности, дающее фактически полное решение проблемы Компьютерной томографии

$$sup\left\{\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}f\left(\xi_{k}\right)\Phi\left(x-\xi_{k}\right)\right\|_{W_{2}^{\rho(y)}\left(\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]^{s}\right)}:f\in W_{2}^{\alpha(y)}\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^{s}\right)\right\}\asymp$$

$$\asymp sup\left\{\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^{2}\right)^{-1}Rf\left(\xi_{k}\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_{k}\right)\right)\left(x\right)\right\|_{W_{2}^{\rho(y)\cdot\left(y_{1}^{2}+\cdots+y_{s}^{2}\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)}:f\in W_{2}^{\alpha(y)\cdot\left(y_{1}^{2}+\cdots+y_{s}^{2}\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)\right\}.$$

Сразу же сообщим, что здесь и всюду в данной статье используются определения и обозначения из [1].

Не ограничивая общности можно предположить, что тело, подлежащее обработке методами Компьютерной томографии, есть открытое множество, содержащееся внутри единичного куба с центром в начале координат вместе со своей границей.

В многомерной теории Компьютерной томографии естественным образом и неизбежно возникли новые виды гильбертовых пространств Соболева на основе поверхностных интегралов по сферам, специальным образом соединяющих преобразования Радона как инструмента получения информации от сканируемого объекта с его искомой плотностью.

Это следующие гильбертовы пространства (см. [1]).

«Гибкая» гладкость функций с распределением по классам определяется положительной непрерывной на $R^s\setminus\{0\}$ функцией $\alpha\left(y_1,...,y_s\right)$, стремящейся к $+\infty$ при $y_j\to+\infty$ и фиксированных остальных переменных, что в символическом обозначении есть

$$\alpha\left(y\right)=\alpha\left(y_{1},\ldots,y_{s}\right)\in C\left(R^{s}\setminus\{0\}\right),\forall\ \mathrm{y}\in R^{s}\setminus\{0\}:\alpha\left(y\right)>0, \tag{1}$$
$$\forall\left(y_{1},\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_{s}\right)\in R^{s-1}:\lim_{y_{j}\to+\infty}\alpha\left(y_{1},\ldots,y_{s}\right)=+\infty\ (j=1,\ldots,s)$$

**На цилиндре**

$$Z:=S^{s-1}\times R^{1}=\left\{\theta\in R^{s}:\|\theta\|=\theta_{1}^{2}+...+\theta_{s}^{2}=1\right\}\times\left\{t:\ -\infty<t<+\infty\ \right\}$$

**определяется гильбертово пространство Соболева-Радона** $W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^1\right)$ как множество функций $g\left(\theta,t\right)$, для которых конечна норма (см. [2, Глава II.5] и [1])

$$\|g\|_{W_{2}^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)}^{2}:=\int_{S^{s-1}}\int_{R^{1}}\alpha^{2}\left(t\theta\right)\left|\widehat{g}_{R^{1}}\left(t,\theta\right)\right|^{2}d\theta dt, \tag{2}$$

где

$$\hat{g}_{R^{1}}\left(\theta,t\right):=\int_{-\infty}^{+\infty}g\left(\theta,\tau\right)e^{-2\pi it\tau}d\tau\left(\theta\in S^{s-1},-\infty<t<+\infty\right), \tag{3}$$

$d\theta$ - элемент гиперповерхности единичной сферы $S^{s-1}$ пространства $R^s$ с центром в начале координат.

**Гильбертовым пространством Соболева** $W_2^{\alpha(y)}\left(R^s\right)$ назовем множество, составленное из всех функций $f=f\left(x\right)$ таких, что конечен интеграл

$$\|f(x)\|_{W_{2}^{\alpha(y)}\left(R^{s}\right)}^{2}=\|f\|_{W_{2}^{\alpha(y)}\left(R^{s}\right)}^{2}:=\int_{R^{s}}\alpha^{2}(y)\left|\widehat{f}\left(y\right)\right|^{2}dy<+\infty, \tag{4}$$

где

$$\widehat{f}\left(y\right):=\int_{R^{s}}f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx. \tag{5}$$

Пусть $\Omega\subset\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^s$ открытое множество, функция $f\left(x\right)$ определена на единичном кубе $E_s=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s$ с носителем $\operatorname{supp} f$ из $\Omega$. На всю оставшуюся часть $R^s\backslash E_s$ евклидова пространства $R^s$ функция $f$ продолжается тождественно нулем.

Для открытого множества $\mathit{\Omega}\subset R^s$ и для всех функций $f\in W_2^{\alpha(y)}\left(R^s\right)$ таких, что $\operatorname{supp} f\subset\Omega$, положим

$$\|f\|_{W_{2}^{\alpha(y)}(\Omega)}:=\|f\|_{W_{2}^{\alpha(y)}\left(R^{s}\right)}, \tag{6}$$

в частности, при $\Omega \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^s$ полагаем, что $f(x)$ продолжена нулем на $E_s \backslash \Omega$ и

$$\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)} := \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}. \tag{7}$$

**Преобразованием Радона** (непрерывной или с какими-то ослаблениями, во всяком случае такими, что все формульные записи корректны и однозначны) функции $f(x)$ называют оператор

$$\breve{f}(x) \equiv Rf(x) := \int_{y \in R_x^{s-1} \cap \Omega} f(y)\, dy =: (R(f(y)))(x),$$

где $x \in R^s$, $R_x^{s-1}$ есть гиперплоскость размерности $s-1$, проходящая через точку $x$ перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{0x}$, соединяющему точки 0 и $x$.

То же в других терминах: преобразование Радона ( $s$-мерное) функции $f(x)$, заданной на Евклидовом пространстве $R^s$ с носителем $\operatorname{supp} f$ из открытого множества $\Omega \subset R^s$, каждой гиперплоскости $R_{t\theta}^{s-1}$ размерности $s-1$, перпендикулярной к вектору $t\theta$, $\theta := (\theta_1, ..., \theta_s) \in R^s$, $\theta_1^2 + ... + \theta_s^2 = 1$, $-\infty < t < \infty$ и проходящей через точку $t\theta$, ставит в соответствие интеграл по ней

$$Rf(\theta, t) \equiv Rf(\theta_1, ..., \theta_s; t) = Rf(t\theta) := \int_{x \in \Omega: \langle x, \theta \rangle = t} f(x)\, dx = \int_{y \in \Omega: y \in R_{t\theta}^{s-1}} f(y) dy.$$

Справедливы равенства (см. [1])

$$\sqrt{2}\, \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)} \tag{8}$$

и

$$\sqrt{2} \left\| \left(R^2\right)^{-1} Rf \right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \sqrt{2} \left\| R^{-1} f \right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|f\|_{W_2^{\alpha(y) \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1} \times R^1)}, \tag{9}$$

позволяющие переходить от $f$ и $R^{-1} f = \left(R^2\right)^{-1} Rf$ в норме (обычных) Соболевских гильбертовых пространств $W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ к $W_2^{\alpha(y) \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(Z = S^{s-1} \times R^1\right)$-нормам Соболева-Радона соответственно функций $Rf$ и $f$.

В [1] показано, что носитель $Rf \equiv \breve{f}$, преобразования Радона функции $f$, изначально определенной на цилиндре $Z = S^{s-1} \times R^1$ как функция $(s+1)$ – переменной $(\theta, t) = (\theta_1, ..., \theta_s, t)$, содержится в $\operatorname{supp} f$ из $R^s$, что влечет то же самое и с функцией обращения $R^{-1} g = f$, $g = Rf$.

В равенствах (8) и (9) в норме (2) преобразование Фурье (3) более обозримо для функций $g(\theta, t)$ вида $g(x) = g(x_1, ..., x_s)$, $x = t\theta$, $g(\theta, t) \equiv g(t\theta)$, к каковым относятся $f(x)$, $Rf(x)$ и $R^{-1} f(x)$: в силу теоретико-множественного равенства

$$R^s \overset{x = t\theta}{\equiv} \bigcup_{t \geq 0, \theta = (\theta_1, ..., \theta_s) \in S^{s-1}} t\theta$$

определение (3) в развернутой записи есть

$$\widehat{g}_{R^1}(x) = \widehat{g}_{R^1}(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta, \tau)\, e^{-2\pi i \tau} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\tau \theta_1^{(x)}, \ldots, \tau \theta_s^{(x)}\right) e^{-2\pi i t \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau \theta_x)\, e^{-2\pi i t \tau} d\tau,$$

в котором $\theta_x := \left(\theta_1^{(x)}, ..., \theta_s^{(x)}\right)$ из $x = t\theta_x$, $\theta_x = \frac{1}{t} x \left(\frac{1}{0} := 0\right)$.

В итоге, здесь достигли возможности сформулировать принципиальный для создания отдельного направления в Компьютерной томографии вопрос:

*Можно ли применить К(В)П-результаты оптимального приближения вычислительными агрегатами вида конечной свертки к искомой функции – плотности*

*– по сканированным значениям его преобразования Радона, да еще по норме «базового» гильбертового пространства Соболева-Радона?*

**Постановки задач Компьютерной томографии для гибких Соболевских гильбертовых пространств.** Пусть на множестве $R^s\setminus\{0\}$ дана положительная непрерывная функция $\alpha(y) = \alpha(y_1,...,y_s)$ такая, что при всех фиксированных $y_1,...,y_{j-1},y_{j+1},...,y_s$ выполнено

$$\lim_{y_j\to+\infty}\alpha(y_1,...,y_{j-1},y_j,y_{j+1},...,y_s) = +\infty \ \ (j=1,...,s). \qquad (1)$$

Тогда по определенной на $R^s\setminus\{0\}$ положительной непрерывной функции $\rho(y) = \rho(y_1,...,y_s)$, удовлетворяющей условию $\rho(y_1,...,y_s) \to +\infty$ при $y_j \to +\infty$ и фиксированных остальных переменных и еще такой, что

$$\rho(y_1,...,y_s) = o(\alpha(y_1,...,y_s))\,(y_1\to+\infty,\ldots,y_s\to+\infty\ ) \qquad (10)$$

ставится экстремальная задача нахождения правильного порядка

$$\inf_{\xi_k\in E_s(k=1,\ldots,N),\ \Phi:E_s\to R^1}\ \sup_{g:\|g\|_{W_2^{\alpha(y)}(\mathcal{G})}\le1}\left\|g(x)-\sum_{k=1}^N g(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(\mathcal{G})} \asymp ?, \qquad (11)$$

где $\mathcal{G}$ есть одно из двух множеств – единичный куб $E_s = \left[-\frac12,\frac12\right]^s$ или цилиндр $Z = \left(S^{s-1}\times R^1\right)$ с соответствующими нормами (4)-(5) и (2)-(3).

Тем самым, ставится экстремальная задача (11) по приближению 1-периодической по каждой из $s$ переменных $x=(x_1,...,x_s)$ функций $g(x)$ из класса $W_2^{\alpha(y)}(\mathcal{G})$ по норме пространства $W_2^{\rho(y)}(\mathcal{G})$ с условием (10) вычислительными агрегатами типа конечной свертки

$$\sum_{k=1}^N g(\xi_k)\Phi(x-\xi_k), \qquad (12)$$

где $\{\xi_k\}_{k=1}^N$ – сетка узлов из единичного куба $_s$, *а* ядро $\Phi(y)$ – это 1-периодическая по каждой из $s$ переменных $y=(y_1,...,y_s)$ действительнозначная функция.

**Взаимосвязь аппроксимационных задач в ареале Компьютерной томографии в свете эквивалентных норм гильбертовых пространств Соболевского типа** в общем виде вынесена в

**Теорема 1.** *Пусть даны банаховы пространства $B_1, B_2$, $B_3$ и $B_4$ функций, определенных на единичном кубе $E_s = \left[-\frac12,\frac12\right]^s$, однородные операторы $\Delta_N^{(1)}(f)$ и $\Delta_N^{(2)}(f)$, т.е. $\Delta_N^{(j)}(cf) = c\Delta_N^{(j)}(f)$ $(j=1,2)$, действуют соответсвенно из $B_1, B_2$ в $B_3$, $B_4$. Если*

$$\|f\|_{B_1}\asymp\|f\|_{B_2}\left(f\epsilon B_1\bigcap B_2\right)$$

*и*

$$\left\|\Delta_N^{(1)}(f)\right\|_{B_3}\asymp\left\|\Delta_N^{(2)}(f)\right\|_{B_4},$$

*то*

$$\delta_N^{(1)}\equiv\sup_{\|f\|_{B_1}\le1}\left\|\Delta_N^{(1)}(f)\right\|_{B_3}\asymp\sup_{\|f\|_{B_2}\le1}\left\|\Delta_N^{(2)}(f)\right\|_{B_4}\equiv\delta_N^{(2)}\,(N=2,3,\ldots). \qquad (13)$$

**Доказательство**. Для определенности предположим, что для постоянных $0<c_1<c_2$ и $0<d_1<d_2$, всех $f$ выполнены неравенства

$$\mathrm{c}_1\|f\|_{B_2}\le\|f\|_{B_1}\le\mathrm{c}_2\|f\|_{B_2} \qquad (14)$$

и

$$d_1\left\|\Delta_N^{(2)}(f)\right\|_{B_4}\le\left\|\Delta_N^{(1)}(f)\right\|_{B_3}\le d_2\left\|\Delta_N^{(2)}(f)\right\|_{B_4}. \qquad (15)$$

Пусть $0<\varepsilon<\delta_N^{(1)}$. Тогда существует функция $\overline{f}$ из $B_1$ такая, что $\|\overline{f}\,\|_{B_1}\le1$ и

$$\delta_N^{(1)} - \varepsilon \overset{(13)}{\leq} \left\|\Delta_N^{(1)}\left(\overline{f}\right)\right\|_{B_3} \overset{(15)}{\leq} d_2\left\|\Delta_N^{(2)}\left(\overline{f}\right)\right\|_{B_4}. \tag{16}$$

Для $f$ таких, что $\|f\|_{B_1} \leq 1$ имеем

$$\|\mathrm{c}_1 f\|_{B_2} = \mathrm{c}_1\|f\|_{B_2} \overset{(14)}{\leq} \|f\|_{B_1} \leq 1,$$

в частности, $\left\|\mathrm{c}_1\overline{f}\right\|_{B_2} \leq 1$ , в свете чего (16) переписывается в виде

$$\delta_N^{(1)} - \ \varepsilon \leq d_2\frac{1}{\mathrm{c}_1}\left\|\Delta_N^{(2)}\left(\mathrm{c}_1\overline{f}\right)\right\|_{B_4} \leq d_2\frac{1}{\mathrm{c}_1}\sup_{\|f\|_{B_2}\leq 1}\left\|\Delta_N^{(2)}\left(f\right)\right\|_{B_4} = \frac{d_2}{\mathrm{c}_1}\delta_N^{(2)},$$

стало быть, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем

$$\delta_N^{(1)} \leq \frac{d_2}{\mathrm{c}_1}\delta_N^{(2)}. \tag{17}$$

Далее, переписывая (14) и (15) со срединными $\|f\|_{B_2}$ и $\left\|\Delta_N^{(2)}\left(f\right)\right\|_{B_4}$

$$\frac{1}{\mathrm{c}_2}\|f\|_{B_1} \leq \|f\|_{B_2} \leq \frac{1}{\mathrm{c}_1}\|f\|_{B_1}$$

и

$$\frac{1}{d_2}\left\|\Delta_N^{(1)}\left(f\right)\right\|_{B_3} \leq \left\|\Delta_N^{(2)}\left(f\right)\right\|_{B_4} \leq \frac{1}{d_1}\left\|\Delta_N^{(1)}\left(f\right)\right\|_{B_3},$$

по симметрии с (17) имеем

$$\delta_N^{(2)} \leq \frac{1}{d_1}\cdot\frac{c_2}{1}\delta_N^{(1)},$$

в итоге

$$\frac{c_1}{d_2}\delta_N^{(1)} \leq \delta_N^{(2)} \leq \frac{c_2}{d_1}\delta_N^{(1)},$$

что доказывает (13).

Теорема 1 доказана.

В контексте темы данной статьи займемся конкретизацией Теоремы 1 в свете Формулы Планшереля для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева [1]:

$$\sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \tag{8}$$

и

$$\sqrt{2}\left\|\left(R^2\right)^{-1}Rf\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \sqrt{2}\,\left\|R^{-1}f\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}. \tag{9}$$

Здесь основным рабочим инструментом будет оператор

$$\Delta_N\left(f\right) = f\left(x\right) - \sum_{k=1}^{N} f\left(\xi_k\right)\Phi\left(x - \xi_k\right), \tag{18}$$

со свойством линейности

$$\Delta_N\left(c_1 f_1 + c_2 f_2\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(c_1 f_1\left(\xi_k\right) + c_2 f_2\left(\xi_k\right)\right)\Phi\left(x - \xi_k\right) = c_1\Delta_N\left(f_1\right) + c_2\Delta_N\left(f_2\right).$$

Пользуясь тождеством $f\left(x\right) = R\left(R^{-1}f\right)\left(x\right)$, будем следовать к формуле приближения искомой плотности $f\left(x\right)$ вычислительным агрегатом $\sum_{k=1}^{N} R^{-1}f\left(\xi_k\right)\cdot R\left(\Phi\left(y - \xi_k\right)\right)(x)$, выраженным через прямое $R$ и обратное $R^{-1}$ преобразования Радона:

$$\Delta_N\left(R^{-1}f\right)\overset{(18)}{=}\Delta_N\left(R^{-1}f)(x\right)=R^{-1}f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f\left(\xi_k\right)\cdot\Phi\left(x-\xi_k\right), \tag{19}$$

и, далее,

$$R\Delta_N\left(R^{-1}f\right)=R\left(R^{-1}f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f\left(\xi_k\right)\cdot\Phi\left(x-\xi_k\right)\right)=$$

$$=f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f\left(\xi_k\right)\cdot R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)\left(x\right)=f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)\cdot R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)\left(x\right) \tag{20}$$

На основе равенства

$$\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\sqrt{2}\left\|R^{-1}f\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} \tag{9}$$

в соответствии с (14) и (15) определим попарно эквивалентные нормы

$$\|f\|_{B_1}=\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\quad \text{и} \quad \|f\|_{B_2}=\left\|R^{-1}f\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)},$$

$$\|f\|_{B_3}=\|\Delta_N\left(f\right)\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\left\|f-\sum_{k=1}^{N}f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}$$

и

$$\|f\|_{B_4}=\left\|\Delta_N\left(R^{-1}f\right)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\overset{(19)}{=}\left\|R^{-1}f(x)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)},$$

согласно которым (13) переписывается виде

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\leq 1}\left\|f-\sum_{k=1}^{N}f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\overset{(13)}{\asymp}$$

$$\asymp\sup_{\|R^{-1}f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\leq 1}\left\|R^{-1}f(x)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\overset{R^{-1}f=g}{=}$$

$$=\sup_{\|g\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\leq 1}\left\|g\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}g\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}. \tag{21}$$

Продолжим применение (13) в условиях (8): положим

$$\|f\|_{B_1}=\left\|R^{-1}f\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)},$$

$$\|f\|_{B_2}=\left\|R\left(R^{-1}f\right)\right\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)},$$

$$\|f\|_{B_3}=\left\|\Delta_N\left(R^{-1}f\right)\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)},$$

$$\|f\|_{B_4}=\left\|R\Delta_N\left(R^{-1}f\right)\right\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\overset{(21)}{=}$$

$$\overset{(21)}{=}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)},$$

тогда в силу равенств

$$R\left(R^{-1}f\right)=f$$

и

$$\sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}=\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}$$

имеют место эквивалентности

$$\|f\|_{B_1}=\left\|R^{-1}f\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}\asymp\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\|f\|_{B_2}$$

и

$$\|f\|_{B_3}=\left\|\Delta_N\left(R^{-1}f\right)\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}\asymp\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f(\xi_k)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\|f\|_{B_4}. \qquad (22)$$

Перед тем как сформулировать Теорему 2, основную в этой статье, обсудим возникшую на данный момент ситуацию.

Как показывает (22), искомым вычислительным агрегатом для нахождения плотности $f(x)$ сканируемого тела $\Omega$ является

$$\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f(\xi_k)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x). \qquad (23)$$

Здесь проблема возникает в том, что в вычислительном агрегате (23) информация от искомой плотности $f$ берется от $R^{-1}f(\xi_k)$, тогда как сканирование в точках $\xi_k$ дает $Rf(\xi_k)$, тем самым возникает задача пересчета $R^{-1}f(\xi_k)$ по значениям $Rf(\xi_k)$.

Следующее утверждение позволяет от $R^{-1}f(\xi)$ переходить к $Rf(\xi)$ и наоборот.

**Предложение 1.** *Для оператора $R$ и его обращения $R^{-1}g(x)=f(x)$, $g=Rf(x)$, действующих на функциях $f(x)$, определенных на единичном кубе $E_s$, справедливы равенства*

$$R^{-1}f(\xi)=\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi) \qquad (24)$$

*и*

$$R^{-1}f(\xi)=\left(R^{-1}\right)^2Rf(\xi). \qquad (25)$$

*Само же $R^{-1}g$ вычисляется по явной формуле $(\gamma<s)$*

$$R^{-1}g=\frac{1}{2}(2\pi)^{3s}I^{-\gamma}R^{\#}I^{\gamma-s+1}g,\quad g=Rf \qquad (26)$$

*композиции операторов*

$$I^{-\gamma}f(x)=(2\pi)^{\frac{3}{2}s-\gamma}\int_{R^s}e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}\|\xi\|^{-\gamma}f(\xi)d\xi$$

*и*

$$R_\theta^{\#}g(x)=g\left(\langle x,\theta\rangle\right).$$

**Доказательство**. Сначала докажем (24). Для оператора $A$ и существующего ему обратного $A^{-1}$ для их композиций имеют место равенства

$$A\cdot A^{-1}=I \ \text{ и } \ A^{-1}\cdot A=I, \qquad (27)$$

где $I$ – тождественный оператор.

Полагая в (27) $A=R\cdot R=R^2$ получим $\left(R^2\right)^{-1}R^2=I$, откуда

$$R^{-1}f(\xi)=I\left(R^{-1}f(\xi)\right)=\left(R^2\right)^{-1}R^2\left(R^{-1}f(\xi)\right)=\left(R^2\right)^{-1}R\left(RR^{-1}f(\xi)\right)=\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi),$$

что есть (24).

Далее, (25) следует из следующих цепочки равенств

$$\left(R^{-1}\right)^2Rf(\xi)=R^{-1}\left(R^{-1}Rf(\xi)\right)=R^{-1}\left(If(\xi)\right)=R^{-1}\left(f(\xi)\right)=R^{-1}f(\xi).$$

Формула (26) есть Теорема 2.1 из [2].

Предложение 1 доказано.

**Замечание 1.** Равенство (24) позволяет в (23) величину $R^{-1}f(\xi)$ выразить через получаемое сканированием число $Rf(\xi)$, и тогда вычислительный агрегат (23) переписывается в виде

$$\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x). \tag{28}$$

Замена $R^{-1}f(\xi)$ в (23) на $\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)$ в вычислительном агрегате (28) показывает, что приближение производится только посредством преобразования Радона $R$ по записанным в (28) вычислениям.

Другой вопрос – вычисление $R^{-1}f(\xi)$ через просканированное $Rf\left(\xi\right)$. Здесь целесообразно воспользоваться равенством (25),

$$R^{-1}f\left(\xi\right)=R^{-1}R^{-1}\left(Rf\left(\xi\right)\right),$$

поскольку явная формула (26) для вычисления $R^{-1}g$ при любом $g$ дает возможность вычисления $R^{-1}\left(Rf\left(\xi\right)\right)$ при известном $g=Rf\left(\xi\right)$, затем $R^{-1}g$ при $g=R^{-1}\left(Rf\left(\xi\right)\right)$, что в итоге дает $R^{-1}f\left(\xi_k\right)$ в (23) и через (24) вычисление алгоритма (28) в полном объеме.

**Предложение 2.** *Пусть на единичном кубе $E_s$ определена непрерывная функция $\Phi\left(y\right)$, 1-периодическая по каждой из $s$ переменных $y=\left(y_1,...,y_s\right)$ и пусть $b\in R^s$. Тогда*

$$R\left(\Phi\left(y-b\right)\right)(x)=\int_{y\in R_x^{s-1}\cap\ supp\Phi(y-b)}\Phi\left(y-b\right)dy=$$

$$=\int_{(y+b)\in R_x^{s-1}\cap supp\ \Phi(y)}\Phi\left(y\right)dy=\int_{\langle y+b,x\rangle=0,y\in supp\ \Phi(y)}\Phi\left(y\right)dy. \tag{29}$$

Действительно, равенства (29) являются непосредственными следствиями определения *Преобразования Радона* функции $f\left(x\right)$,

$$Rf\left(x\right):=\int_{y\in R_x^{s-1}}f\left(y\right)dy=:R\left(f\left(y\right)\right)(x), \tag{30}$$

примененного при $f\left(y\right)=\Phi\left(y-b\right)$, с заменами переменных.

**Замечание 2.** Если, как это было сказано в Замечании 1, для вычислений $R^{-1}f(\xi)$ по просканированному $Rf\left(\xi\right)$ лучше воспользоваться (25) и (26), то для вычислений $R\Phi$ следует применить равенство (29). Именно, в случае, когда ядро $\Phi\left(y\right)$ есть элементарная функция с явно вычисляемой первообразной или же кусочно-постоянная, к таковым относятся тригонометрические многочлены, кусочно-линейные функции или же функции системы Хаара, то надлежит воспользоваться равенством (29), что вводит аналитическую составляющую в вычислительный агрегат (28).

Таким образом, соотношение (22) в контексте Теоремы 1 заменяется на

$$\|f\|_{B_3}=\left\|\Delta_N\left(R^{-1}f\right)\right\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}\overset{(28)}{\asymp}\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}=\|f\|_{B_4}. \tag{31}$$

В итоге из (18)-(21) и замены (22) на (31), в силу (13) справедлива

**Теорема 2**. *Пусть даны функции $\alpha\left(y\right)$ и $\rho\left(y\right)$ из определения* (1), *связанные условием $\rho\left(y\right)=o\left(\alpha\left(y\right)\right)\left(y\to\infty\right)$, тогда*

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\le1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}. \tag{32}$$

Соотношение (32) примечательно тем, что каждый результат по восстановлению функций в гибком Соболевском гильбертовом пространстве $W_2^{\alpha(y)}(E_s)$ в виде конечной свертки автоматически решает проблему Компьютерной томографии в своем (что естественно) гибком гильбертовом пространстве Соболева-Радона $W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)$, что, по-видимому, в новом звучании существенно продвигает всю эту Радонову проблематику, - как в таких случаях говорил С.М. Воронин «Нурлан, с Божьей помощью мы вышли на оперативный простор».

**Замечание 3**. В доступной для нас научной литературе по Компьютерной томографии, начиная с обстоятельной монографии [2], не были обнаружены приближения к искомой плотности $f(x)$ в виде конечной свертки значений $(R \cdot R)^{-1}$ - образа преобразования Радона в узлах сетки с конкретным ядром, подвергшемуся преобразованию Радона.

В качестве применения Теоремы 2 покажем, как конкретные результаты по восстановлению функций в Соболевском пространстве моментально решают задачи Компьютерной томографии.

С этой целью обратимся к классическим гильбертовым пространствам Соболева: в условиях $supp\, f \subset \Omega \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^s$ функцию $f(x)$ можно периодически с периодом 1 по каждой из $s$ переменных продолжить на все $R^s$, что возможно по причине обращения в нуль на границе $E_s = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^s$.

При $\beta \geq 0$

$$\rho(y) = \left(1 + \|y\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}} \tag{33}$$

определение (4) дает (обычное) пространство Соболева

$$\|f\|^2_{W_2^\beta(R^s)} = \int_{R^s} \left(1 + \|y\|^2\right)^\beta \left|\widehat{f}(y)\right|^2 dy, \tag{34}$$

в контексте чего Теорема 2 имеет формулировку

**Теорема 3**. *Пусть даны число* $\beta \geq 0$ *и функция* $\alpha(y)$ *из определения (1), связанные условием* $\|y\|^{\frac{\beta}{2}} = \mathrm{o}(\alpha(y))\,(y \to \infty)$, *тогда*

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)} \leq 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Phi(x - \xi_k) \right\|_{W_2^\beta(E_s)} \asymp \tag{35}$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \leq 1} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^N \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R\left(\Phi\left(y - \xi_k\right)\right)(x) \right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1+\beta}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}.$$

Применение Теоремы 3 начнем с такой конкретизации (35).

Имеет место

**Теорема А.** *Пусть даны числа* $s\,(s = 1, 2, ...)$, $2r > s$ *и* $0 \leq \rho < r$. *Тогда для* $N = n^s\,(n = 2, 3, ...)$

$$\sup_{g:\|g\|_{W_2^r(E_s)} \leq 1} \left\| g(x) - \frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k = (k_1, ..., k_s) \in Z_+^s \\ k_j = 1, ..., n\,(j = 1, ..., s)}} g\left(\frac{k}{n}\right) D_N\left(x - \frac{k}{n}\right) \right\|_{W_2^\rho(E_s)} \asymp N^{-\frac{r-\rho}{s}},$$

*где* $D_N(x)$ *– ядро Дирихле от* $s$ *переменных*

$$D_N(x_1, ..., x_s) = D_n(x_1) \cdot ... \cdot D_n(x_s), D_n(x_j) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos 2\pi i k x_j\,(j = 1, ..., s).$$

В таких предположениях при $s = 2$ Теорема А доказана в [3-4] на основе результатов из статьи [5], случай $s \geq 3$ доказывается по той же схеме.

Отсюда для $\alpha(y) = \left(1 + \|y\|^2\right)^{\frac{r}{2}}$ получаем справедливость утверждения

**Теорема 4.** *Пусть даны числа* $s\,(s = 1, 2, ...)$, $2r > s$ *и* $0 \leq \rho < r$, *открытое множество* $\Omega \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^s$. *Тогда для класса* $W_2^{r + \frac{s-1}{2}}\left(Z = S^{s-1} \times R^1\right)$ *и всякого* $N = n^s\,(n = 2, 3, ...)$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f:\|f\|_{W_2^{r+\frac{s-1}{2}}\left(Z=S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\\ k_j=1,...,n\\ (j=1,...,s)}}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\frac{k}{n}\right)R\left(D_N\left(y-\frac{k}{n}\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho+\frac{s-1}{2}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\asymp N^{-\frac{r-\rho}{s}}.$$

Еще больший ареал прямого выхода на точный порядок решения задачи Компьютерной томографии имеет соотношение (35), в котором при $\beta=0$ погрешность вычисляется по норме Лебегова гильбертова пространства $L^2(E_s)$, тогда как при $\beta>0$ обязательное условие принадлежности ядра $\Phi(y)$ к классу $W_2^{\beta}(E_s)$ тем больше ограничивает применение Теоремы 3, чем больше $\beta>0$:

При $\beta=0$ Теорема 3 имеет следующее расширенное звучание с потенциально принципиального значения выводами:

**Теорема 5**. *Пусть дана функция $\alpha(y)$ из определения* (1), *связанная условием $\|y\|^{\frac{\beta}{2}}=o(\alpha(y))\,(y\to\infty)$, тогда*

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \text{все возможные линейные}\\ \text{функционалы над } W_2^{\alpha(y)}(E_s),\quad \varphi_N}}\ \sup_{f\in W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\|_{L^2(E_s)}\ll$$

$$\ll\inf_{\substack{\xi_k\in E_s\,(k=1,\dots,N),\\ \Phi:E_s\to R^1}}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}\asymp$$

$$\asymp\inf_{\substack{\xi_k\in E_s\\ (k=1,\dots,N),\\ \Phi:E_s\to R^1}}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi_k)R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\ll \tag{36}$$

$$\ll\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi_k)R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}=$$

$$=\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi_k)\int_{y\in R_x^{s-1}}\Phi(y-\xi_k)\,dy\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}=$$

$$\overset{\substack{x=t\theta,\\ \xi_k=t_k\theta_k}}{=}\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left(\int_{S^{s-1}\times R^1}t^{s-1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\tau\theta)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(t_k\theta_k)\int_{y\in R_{\tau\theta}^{s-1}}\Phi(y-t_k\theta_k)\,dy\right]d\tau\right|^2 dtd\theta\right)^{\frac{1}{2}}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}.$$

**Доказательство** мгновенно следует из Теоремы 3 и (33)-(35), откуда при $\beta=0$ получаем

$$\|f\|^2_{W_2^0(R^s)} = \int_{\mathrm{R}^s} \left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{0}{2}} \left|\hat{f}(y)\right|^2 dy = \int_{\mathrm{R}^s} \left|\hat{f}(y)\right|^2 dy = \|f\|^2_{L_2(R^s)},$$

и

$$\|f\|_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \overset{\beta=0}{=} \|f\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)},$$

и тогда соотношения (35) записываются в виде (36).

**Замечание 4**. По-видимому, эквивалентности (36) можно понимать как фундаментальное соотношение в Компьютерной томографии, когда приближение искомой плотности $f(x)$ в гильбертовой $L^2$-метрике самого простого вида вычислительно эффективной конечной сверткой $\sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)$ автоматически дает алгоритм $\sum_{k=1}^N \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R(\Phi(y-\xi_k))(x)$, с управляемой точностью заменяющей искомую плотность $f(x)$ по результатам Радоновского $R$ сканирования в конкретных точках $\{\xi_k\}_{k=1}^N$, да еще с последующим К(В)П-исследованием с инженерными выгодами при создании компьютерной техники благодаря знанию допускаемой погрешности сканирования с обеспечением правильного порядка приближения по точной информации.

Приведем примеры применения Теоремы 5 в случае конкретных классов $W_2^{\alpha(y)}$ и ядер $\Phi(y)$, являющихся элементарными функциями с явно вычисляемой первообразной, когда равенство

$$R(\Phi(y-\xi_k))(x) = \int_{y\in R_x^{s-1}\cap supp\Phi(y-\xi_k)} \Phi(y-\xi_k)\, dy \tag{29}$$

в части $R(\Phi(y-\xi_k))(x)$ всему вычислительному агрегату

$$\sum_{k=1}^N \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R(\Phi(y-\xi_k))(x)$$

придает явный вид.

Начнем с классического пространства Соболева

$$\alpha(y) = \left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{r}{2}}, W_2^r(E_s),$$

чему предпошлем К(В)П-результат общего характера [5], в частном случае приводящего к окончательным результатам в Компьютерной томографии.

Это следующая оценка снизу, полученная для всех возможных вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной информации как «Конструктивное доказательство» оценок снизу в виде построения экстремальных функций:

**Теорема В.** *Пусть даны целое положительное число $s$ и числа $1\le p\le q\le\infty$. Пусть также даны неотрицательные целые числа $r, \alpha_1, ..., \alpha_s$ такие, что $r > \alpha_1+...+\alpha_s+sl$, где $l$ равно $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{q}$ или 0, смотря по тому $2\le p\le q\le\infty$, $1\le p<2\le q\le+\infty$ или $1\le p\le q<2$. Тогда*

$$\inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N - \text{все возможные линейные} \\ \text{функционалы над } W_2^r(E_s),\quad \varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(E_s)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\ldots,l_N(f);x)\|_{L^2(E_s)} \gg$$

$$>> \begin{cases} N^{\frac{-r}{s}+\frac{\alpha_1+...+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & \text{если } 2\le p\le q\le\infty, \\ N^{\frac{-r}{s}+\frac{\alpha_1+...+\alpha_s}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & \text{если } 1\le p<2\le q\le+\infty, \\ N^{\frac{-r}{s}+\frac{\alpha_1+...+\alpha_s}{s}}, & \text{если } 1\le p\le q<2. \end{cases}$$

Перечислим, начиная с преобразования Радона

$$l_u\left(f;R\right)=Rf\left(u\right)=\int_{y\in R_u^{s-1}} f\left(y\right)dy,$$

несколько функционалов, каждый из которых содержится в последующем:

- Обобщенное преобразование Радона [6] с положительным весом $\psi$,

$$l^{(1)}\left(f\right)=l_u^{(1)}\left(f;R_\psi\right)=R_\psi f\left(u\right)=\int_{y\in R_u^{s-1}} \psi\left(y\right)f\left(y\right)dy,$$

- Реконструктивная томография [7] в линейных операторах типа $Bf\left(x\right)$,

$$l^{(2)}\left(f\right)=l_u^{(2)}\left(f;B\right)=Bf\left(u\right),$$

- Всевозможные (известные и будущие) обобщения преобразования Радона в линейных операторах типа $Qf\left(x\right)$

$$l^{(3)}\left(f\right)=l_u^{(3)}\left(f;Q\right)=Qf\left(u\right),$$

- Всевозможные линейные функционалы вида $Tf$, определяемые по значениям в точках

$$l^{(4)}\left(f\right)=l_u^{(4)}\left(f;T\right)=Tf\left(u\right).$$

Из Теоремы 5 и Теоремы В при $p=q=2$, $\alpha_1=...=\alpha_s=0$ следует

**Теорема 6.** *Пусть даны числа* $s$ $(s=1,2,...)$, $2r>s$. *Тогда для функционалов* $l^{(j)}$ $(j=1,...,4)$ *имеют место соотношения эквивалентности* ( $N=n^s\,(n=2,3,...)$ )

$$N^{-\frac{r}{s}}\asymp \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N-\text{всевозможные линейные}\\ \text{функционалы над } W_2^r(E_s),\varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(E_s)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1\left(f\right),\dots,l_N\left(f\right);x\right)\right\|_{L^2(E_s)}\asymp$$

$$\asymp \max_{j=1,\dots,4} \inf_{\substack{\text{всевозможные линейные}\\ \text{функционалы над } W_2^r\left(E_s\right)\\ \text{типа } l_\tau^{(j)}\left(f\right)\equiv l_\tau^{(j)}f,\\ u_\tau\left(\tau=1,\dots,N\right)\text{ из } E_s,\quad \varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(E_s)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(l_1^{(j)}f\left(u_1\right),\dots,l_N^{(j)}f\left(u_N\right);x\right)\right\|_{L^2(E_s)}\asymp$$

$$\asymp \inf_{\substack{u_\tau\left(\tau=1,\dots,N\right)\text{ из } E_s,\\ \varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(E_s)}\left\|f\left(x\right)-\varphi_N\left(Rf\left(u_1\right),\dots,Rf\left(u_N\right);x\right)\right\|_{L^2(E_s)}\asymp$$

$$\asymp \inf_{\substack{\xi_k\in E_s\left(k=1,\dots,N\right),\\ \Phi:E_s\to R^1}} \sup_{\|f\|_{W_2^r(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(E_s)}\asymp$$

$$\asymp \inf_{\substack{\xi_k\in E_s\\ \left(k=1,\dots,N\right),\\ \Phi:E_s\to R^1}} \sup_{\|f\|_{W_2^{\frac{r+(s-1)}{2}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^N R^{-1}f\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)\left(x\right)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}=$$

$$=\inf_{\substack{\xi_k\in E_s\\ \left(k=1,\dots,N\right),\\ \Phi:E_s\to R^1}} \sup_{\|f\|_{W_2^{\|y\|\frac{r+(s-1)}{2}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^N\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)\int_{y\in R_x^{s-1}}\Phi\left(y-\xi_k\right)dy\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}=$$

$$\overset{\substack{x=t\theta,\\ \xi_k=t_k\theta_k}}{=} \mathop{inf}_{\substack{\xi_k\in E_s\\ \left(k=1,\dots,N\right),\\ \Phi:E_s\to R^1}} \mathop{sup}_{\|f\|_{W_2^{\|y\|\frac{r+(s-1)}{2}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}$$

$$\left(\int_{S^{s-1}\times R^1} t^{s-1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\tau\theta)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(t_k\theta_k)\int_{y\in R^{s-1}_{\tau\theta}}\Phi(y-t_k\theta_k)\,dye^{-2\pi it\tau}\right]d\tau\right|^2 dtd\theta\right)^{\frac{1}{2}}\asymp$$

$$\asymp \sup_{W_2^{\|y\|\frac{r+(s-1)}{2}}(S^{s-1}\times R^1)}\left\| f(x)-\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k=\\(k_1,...,k_s)\\k_j=1,...,n\\(j=1,...,s)}}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\frac{k}{n}\right)\sum_{\substack{m\in Z^s\\m=(m_1,\ldots,m_s)\\-n\le m_j\le n\\(j=1,\ldots,s)}}\int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m,y-\frac{k}{n}\right)\right)dy\right\|_{W_2^{\|y\|\frac{s-1}{2}}(S^{s-1}\times R^1)}$$

$$\asymp \sup_{f:\|f\|_{W_2^r(E_s)}\le 1}\left\| f(x)-\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s_+\\k_j=1,...,n\\(j=1,...,s)}} f\left(\frac{k}{n}\right)D_N\left(x-\frac{k}{n}\right)\right\|_{L^2(E_s)}\asymp N^{-\frac{s}{r}}.$$

**Замечание 5.** Теорема 6 показывает, что нельзя построить операторы восстановления плотности $f(x)$ по линейной информации лучше, чем преобразование Радона $Rf$ .

Теперь обратимся к классам $SW_2^r(E_s)$ . Пространство Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^\beta(E_s)$ определяется по

$$\alpha(y)=\alpha(y_1,\ldots,y_s)=\left(\prod_{j=1}^{s} max\{|y_j|;1\}\right)^\beta$$

с нормой

$$\|f\|^2_{SW_2^\beta(E_s)}=\int_{R^s}\left(\prod_{j=1}^{s}(\max\{|y_j|,1\})^2\right)^\beta\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy.$$

Кайратом Шерниязовым [8-9] определен вычислительный агрегат с сеткой узлов, являющихся линейной комбинацией сеток Коробова

**Теорема С.** *Пусть дано целое положительное число* $s$ . *Пусть для каждого* $k\,(k=1,2,...)$ *число* $p_k$ *- есть простое число, удовлетворяющее соотношению* $2^{k+3}\le p_k\cdot k^2<2^{k+4}$ , *а целые числа* $\alpha_1^{(k)}=1$ . $\alpha_2^{(k)},...,\alpha_s^{(k)}$ *- оптимальные коэффициенты по модулю* $p_k$ *индекса* $\gamma\ge 0$ . *Пусть для всякого целого* $l\ge s+1$ *и всякого* $\tau=(\tau_1,\tau_2,...,\tau_s)$ *из* $Z^s$ *такого, что* $\tau_j>0$ *и* $\|\tau\|\overset{def}{=}\tau_1+\tau_2+...+\tau_s<l$ *матрица* $A_{l,\tau}$ *и множества* $K(l,\tau)$ , $p(\tau)$ *определены соответственно равенствами*

$$A_{l,\tau}=\begin{pmatrix} 2^{\tau_1+1}p_{l-\|\tau\|} & 0 & 0 & ... & 0\\ -2^{\tau_1+1}\alpha_2^{(l-\|\tau\|)} & 2^{\tau_2+1} & 0 & ... & 0\\ -2^{\tau_1+1}\alpha_3^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 2^{\tau_3+1} & ... & 0\\ . & . & . & ... & .\\ -2^{\tau_1+1}\alpha_s^{(l-\|\tau\|)} & 0 & 0 & ... & 2^{\tau_s+1}\end{pmatrix},$$

$$K(l,\tau)=\left\{k\in Z^s:-2^{\tau_1}p_{l-\|\tau\|}\le k_1<2^{\tau_1}p_{l-\|\tau\|},-2^{\tau_j}\le k_j<2^{\tau_j}\,(j=2,3,...,s)\right\}$$

$$p(\tau)=\left\{m=(m_1,m_2,...,m_s)\in Z^s:2^{\tau_j-1}\le\max\{1,|m_j|\}<2^{\tau_j}\,(j=1,...,s)\right\}.$$

*Тогда при любом положительном* $N\ge 2^{2s+5}$ *имеют место следующие соотношения: при* $2r>1$

$$\frac{1}{N^r} \underset{r,s,v}{<<} \inf_{\substack{\xi^{(k)} \in [0,1]^s \\ (k=1,2,...,N)}} \inf_{\varphi_N} \sup_{f \in SW_2^r} \left\| f(\cdot) - \varphi_N \left( f\left(\xi^{(1)}\right), f\left(\xi^{(2)}\right), ..., f\left(\xi^{(N)}\right), \cdot \right)_v \right\| <<$$

$$<< \sup_{f \in SW_2^r(0,1)^s} \sup_{x \in [0,1]^s} |f(x) - (T_N f)(x)| \underset{r,s,\gamma}{<<} \frac{\ln^{\left(r+\frac{1}{2}\right)(s-1)} N}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

*где* $\inf\limits_{\varphi_N}$ *берется по всем функциям*

$$\varphi_N(z_1, z_2, ..., z_N, x) : C^N \times [0,1]^s \to C,$$

*измеримым по переменной* $x$ *в смысле Лебега, а опертор* $T_N$ *определен равенствами*

$$n = \max \left\{ l \in Z_+ : card \left[ \bigcup_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0,\ \|\tau\| < l}} \left\{ k\left(A_{l,\tau}^{-1}\right)' : k \in K(l,\tau) \right\} \right] \le N \right\},$$

и

$$(T_N f)(x) = \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0,\ \|\tau\| < n}} \frac{1}{\det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} f\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right) \sum_{m \in \rho(\tau)} e^{2\pi i \left(m, x - k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)}.$$

В силу Теоремы 5 и Теоремы С имеет место

**Теорема 7.** *Пусть* $2r > 1$ . *Тогда*

$$N^{-r} \ll \inf_{\substack{t_k \in E_s \ (k=1,\dots,N) \\ \varphi_N}} \sup_{f \in SW_2^r(E_s)} \| f(x) - \varphi_N(f(t_1), \dots, f(t_N); x) \|_{L^2(E_s)} \ll$$

$$\ll \sup_{\|f\|_{SW_2^r(E_s)} \le 1} \| f(x) - (T_N f)(x) \|_{L^2(E_s)} \overset{(36)}{\asymp}$$

$$\overset{(36)}{\asymp} \sup_{\|f\|_{W_2^{\left(\Pi_{j=1}^s max\left\{|y_j|;1\right\}\right)^r \cdot \|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} \le 1} \| f(x) -$$

$$- \sum_{\substack{\tau \in Z^s : \\ \tau_j > 0, \|\tau\| < n}} \frac{1}{det A_{n,\tau}} \sum_{k \in K(n,\tau)} \left(R^2\right)^{-1} R f\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right) \sum_{m \in \rho(\tau)} \int_{y \in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y - k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\right) dy \Bigg\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)} <<$$

$$\ll \sup_{\|f\|_{SW_2^r(E_s)} \le 1} \| f(x) - (T_N f)(x) \|_{L^\infty(E_s)} \ll N^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)}.$$

Для вычислительного агрегата из [10] с сеткой типа Смоляка, порождаемого Методом тензорных произведений функционалов [11],

$$\sum_{(\nu_1,...,\nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu_0}^s} \frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, ..., \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1} \left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)\left(1 + (-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] exp\left(2\pi i n_j \left(y_j - \frac{k_j}{2^{?_j}}\right)\right)$$

и соответствующего ему $R$-агрегата

$$\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega\subset Z^s_{\nu_0}} \frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} ... \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \int_{y\in R_x^{s-1}} \left\{\prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1} \left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] \exp\left(2\pi i n_j\left(y_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right)\right\} dy$$

при реализации в виде ядра Дирихле

$$D_\nu(x) = \sum_{|\tau|\le 2^{\nu-1}} e^{2\pi i\tau x}, \lambda_\tau^{(\nu)}\left(D_{2^{\nu-1}}\right) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad |\tau| \le 2^{\nu-1}; \\ 0, & \textit{если} \quad |\tau| > 2^{\nu-1}, \end{cases}$$

соответствующие вычислительные агрегаты обозначим через $\Lambda_q(x;f;D)$ и $\Lambda_q(x;Rf;D)$.

Тогда, совместно с Теоремой 5, справедлива

**Теорема 8.** *Пусть* $2r>1$. *Имеют место соотношения*

$$\frac{(lnN)^{(s-1)r}}{N^r} \ll \inf_{\substack{t_k\in E_s \ (k=1,\dots,N)\\ \varphi_N}} \sup_{f\in SW_2^r(E_s)} \|f(x)-\varphi_N(f(t_1),\dots,f(t_N);x)\|_{L^2(E_s)} \ll$$

$$\sup_{f\in SW_2^r(E_s)} \|f(x)-\Lambda_q(x;f;D)\|_{L^2(E_s)} \overset{(36)}{\asymp}$$

$$\overset{(36)}{\asymp} \sup_{\|f\|_{W_2^{\left(\prod_{j=1}^s max\left\{|y_j|;1\right\}\right)^r\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1} \|f(x)-\Lambda_q(x;Rf;D)\|_{L^2(E_s)} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{W_2^{\left(\prod_{j=1}^s max\left\{|y_j|;1\right\}\right)^r\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1} \|f(x)-$$

$$-\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega\subset Z^s_{\nu_0}} \frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} ... \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \int_{y\in R_x^{s-1}} \left\{\prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1} \left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] \exp\left(2\pi i n_j\left(y_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right)\right\} dy \Bigg\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} \succ\prec$$

$$\succ\prec \sup_{f\in SW_2^r(E_s)} \|f(x)-\Lambda_q(x;f;D)\|_{L^2(E_s)} << \sup_{f\in E_s^r} \|f(x)-\Lambda_q(x;f;D)\|_{C([0,1]^s)} \ll$$

$$\ll \frac{(lnN)^{(s-1)r}}{N^{r-1}}.$$

**Замечание 6.** Если эквивалентность (32) между основными определениями Компьютерной томографии и Компьютерного (вычислительного) поперечника носит неожиданный характер в теории более чем прямой связи этих двух теорий, одинаково относящихся к высшим объектам исследований Теоретической и Прикладной математик, то другой неожиданностью можно понимать аналитическую выразимость в явных формулах алгоритма

$$\sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R\left(\Phi(y-\xi_k)\right)(x)$$

по сканированным числовым данным $Rf(\xi_k)$, что обеспечивают равенства (26) и (29).

Далее, в К(В)П-рамках в порядке развития возникающей в этой статье отдельной линии исследований в Компьютерной томографии сделаем беглый обзор формулировок постановок задач и общего характера соотношений между задействованными различными объектами (см. также Научную программу В на 2022 год в Сборнике [12] и еще 21 публикацию нашей Научной школы в Списке литературы).

$1^0$. **К(В)П-исследование преобразования Радона в рамках Гильбертова пространства Соболева-Радона $W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R\right)$.** Гильбертово пространство Соболева-Радона $W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^1\right)$ как по своему происхождению имеющее прямое отношение к Компьютерной томографии требует специального К(В)П-изучения, сложность чего уже прослеживается по норме (2)-(3):

$$\|g\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(S^{s-1}\times R^1)} := \int_{S^{s-1}}\int_{R^1}\alpha^2\left(t\theta\right)\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\theta,\tau\right)e^{-2\pi it\tau}d\tau\right|^2 d\theta dt$$

с числовыми параметрами.

Так, если (обычное) анизотропное гильбертово пространство Соболева

$$\|f\|^2_{\mathrm{W}_2^{\beta_1,\ldots,\beta_s}(R^s)} = \int_{R^s}\left(|y_1|^{2\beta_1}+\cdots+|y_s|^{2\beta_s}\right)\left|\hat{f}\left(y\right)\right|^2 dy$$

определяется по функции

$$\alpha_W\left(y;\beta_1,\ldots,\beta_s\right) = \left(|y_1|^{2\beta_1}+\cdots+|y_s|^{2\beta_s}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\beta_1>0,\ldots,\beta_s>0\right),$$

то соответствующая норма Соболева-Радона на $S^{s-1}\times R^1$ устрашающе сложна с

$$\alpha\left(y\right) = \alpha\left(y_1,\ldots,y_s\right) = \left(|y_1|^{2\beta_1}+\cdots+|y_s|^{2\beta_s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}$$

и

$$\|Rf\|_{W_2\left(|y_1|^{2\beta_1}+\cdots+|y_s|^{2\beta_s}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} \asymp \|f\|_{W_2^{\beta_1,\ldots\beta_{s1}}(R^s)}.$$

Еще более тонкую классификацию функций дают

**Обобщенные классы Соболева** $W_2^{\omega_{\beta_1},\ldots,\omega_{\beta_s}}$. Для данного действительного числа $\beta\geq 1$ всякую непрерывную, неубывающую на [0,1] функцию $\omega_\beta\left(\delta\right)$ такую, что $\omega_\beta\left(0\right)=0$ и $\frac{\omega_\beta(\eta)}{\eta^\beta}\leq C(\omega_\beta)\cdot\frac{\omega_\beta(\xi)}{\xi^\beta}$ при некотором $C(\omega_\beta)>0$ и всех $0<\xi<\eta\leq 1$, называют *функцией типа модуля гладкости $\beta$-го порядка.*

В качестве функций типа модуля гладкости $\beta$-го порядка можно указать функции вида $\delta^\beta\log^{\beta_1}\frac{1}{\delta}$, $\delta^\beta\log^{\beta_1}\frac{1}{\delta}\log\log^{\beta_2}\frac{1}{\delta}$ и т.п., где соответственно $\beta\geq 1$, $0<\beta_1<+\infty$, $-\infty<\beta_2<+\infty$.

Класс $W_2^{\omega_{\beta_1},\ldots,\omega_{\beta_s}}$ есть, по определению, множество всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,...,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега $\hat{f}(m)$ которых удовлетворяют условию

$$\|f\|^2_{W_2^{\omega_{\beta_1},\ldots,\omega_{\beta_s}}} = \sum_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)\right|^2\cdot\left(\omega_{\beta_1}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{m_1}}\right)+...+\omega_{\beta_s}^{-2}\left(\frac{1}{\overline{m_s}}\right)\right)\leq 1,$$

где $Z^s$ - множество всех векторов $m=(m_1,...,m_s)$ с целочисленными компонентами, $\overline{m_j}=\max\{1,|m_j|\}, j=1,..,s$.

В частности, при $\omega_{\beta_j}(\delta)=\delta^{\beta_j}$ классы $W_2^{\delta^{\beta_1},\ldots,\delta^{\beta_s}}$ сводятся к обычным анизотропным классам Соболева $W_2^{\beta_1,\ldots,\beta_s}$.

Соответствующие нормы такие:

$$\alpha^2\left(y\right)=\omega_{\beta_1}^{-2}\left(y\right)+...+\omega_{\beta_s}^{-2}\left(y\right), \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} \overset{(8)}{=} \sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} \overset{(6)-(7)}{=} \|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}. \quad (37)$$

$2^0$. **Полное К(В)П-исследование гибкого Соболевского гильбертова пространства $\boldsymbol{W_2^{\alpha(y)}}(\boldsymbol{R^s})$.** Гибкие гильбертовы пространства Соболева $W_2^{\alpha(y)}\left(E_s\right)$ сами по себе открывают самостоятельного значения **К(В)П-**исследования с установлением новых $\alpha(y)$-эффектов в продолжение имеющихся результатов для Соболевских гильбертовых пространств $W_2^r(E_s)$ и $SW_2^r(E_s)$.

Можно предвидеть и ожидаемые сложности – как объединить в одной формуле различные правильные $\alpha(y)$-порядки восстановления функций, в степенной шкале равные $N^{-\frac{r}{s}}$ для обычных пространств Соболева $W_2^r(E_s)$ и $N^{-(r-\varepsilon)}$ для пространств Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r(E_s)$ (см. об этом, например, соответственно [13] и [8-9]), чем напоминает знаменитый критерий В.И. Коляды вложения $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_s}(E_s) \subset L^q(E_s)$ $(1 \le p < q < \infty)$, в одном очень сложном виде объединяющие принципиально различные случаи конкретизаций классов со своими разными явного вида критериями вложения (см. [14], а также [15-16]):

$$sup\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{s}\varepsilon_i(n)\right)\right)^{\frac{q}{p}-1} 2^{n\left[s\left(\frac{q}{p}-1\right)-q\right]} < \infty,$$

где *sup* берется по всем неотрицательным последовательностям $\varepsilon_i(n)\,(i=1,\dots,s)$ таким, что $(k=1,2,\dots)$

$$\sum_{n=1}^{k}\varepsilon_i^p(n) \le 2^{-k}\left[\omega_i^{-1}\left(2^{-k}\right)\right]^{-1},$$

где $g^{-1}$ – функция, обратная к $g$.

Как это установлено в работах [17-19], задачи восстановления в условиях большой гибкости анизотропных классов $W_2^{\omega_1,\dots,\omega_s}(E_s)$ выражаются в терминах среднего модуля непрерывности В.И. Коляды.

В связи с чем представляют естественный интерес вопросы Компьютерной томографии в классах функций по норме (37), – не исключено, что и здесь возникнут средние модули непрерывности, определяемые следующим образом.

Пусть $\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}$ – система функций типа модуля гладкости порядков $r_1,\dots,r_s$ соответственно. В дальнейшем, не ограничивая общности (в случае необходимости, переходя к $\frac{\left(\omega_{r_j}(\delta)+\delta^r\right)}{\omega_{r_j}(1)+1}$) будем считать, что все функции $\omega_{r_j}$ $(j=1,..,s)$ строго возрастают на $[0,1]$ и $\omega_{r_j}(1)=1$.

Обратную к инъективной функции $g$ будем обозначать через $g^{-1}$.

Рассмотрим функции $\omega_{r_j}^{-1}(\zeta)$, обратные к $\omega_{r_j}(\delta)$, и положим

$$\delta=\tau^{-1}(\zeta)=\prod_{j=1}^{s}\omega_{r_j}^{-1}(\zeta)\,(0\le\zeta\le 1).$$

Очевидно, что $\delta=\tau^{-1}(\zeta)$ является строго возрастающей непрерывной функцией на [0,1], причем $\tau^{-1}(0)=0$ и $\tau^{-1}(1)=1$. Функцию $\zeta=\tau(\delta)$, обратную к $\tau^{-1}(\zeta)$, следуя В.И. Коляде [14], будем называть *средней функцией системы* $\omega_{r_1},\dots,\omega_{r_s}$.

Если $\omega_{r_1}(\delta)=\delta^{r_1},\dots,\omega_{r_s}(\delta)=\delta^{r_s}$, то средний модуль гладкости этой системы есть $\omega(\delta)=\delta^{\left(r_1^{-1}+\dots+r_s^{-1}\right)^{-1}}$. Отметим, что в случае $\omega_{v_1}(\delta)=\dots=\omega_{v_s}(\delta)=\omega_\nu(\delta)$ средняя функция этой системы, очевидно, есть функция $\zeta=\tau(\delta)$, обратная к функции $\delta=\tau^{-1}(\zeta)=\left(\omega_\nu^{-1}(\zeta)\right)^s$.

**Эквивалентность периодических и непериодических норм гибких гильбертовых пространств Соболева.** И, еще один в этом ряду, скорее всего технический, момент составляет эквивалентность норм гибких Соболевских гильбертовых пространств на всем евклидовом пространстве и периодического случая, – соответственно в интегральных нормах

$$\|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)} := \|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \int_{R^s}\alpha^2(y)\left|\hat{f}(y)\right|^2 dy,\, \hat{f}(y)=\int_{R^s}f(x)\,e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}dx$$

и в форме числовых рядов

$$\sum_{m\in Z^s}\alpha^2(m)\left|\hat{f}(m)\right|^2,\hat{f}(m)=\int_{E_s}f(x)\,e^{-2\pi i(m,x)}dx,$$

примером коих служит их эквивалентность при $\alpha(y)=\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\beta}{2}}$ (см.[2, Глава VII.4.4.]).

$3^0$. **Оценки качества вычислительных агрегатов Компьютерной томографии во множестве всех операторов по всевозможной линейной информации**. Ориентиром для оценки неулучшаемости или установления степени потери скорости приближения вычислительным агрегатом

$$\inf_{\xi_k\in E_s(k=1,\dots,N),\Phi:E_s\to R^1}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\asymp$$

$$\asymp\inf_{\substack{\xi_k\in E_s\\ (k=1,\dots,N),\\ \Phi:E_s\to R^1}}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N R^{-1}f(\xi_k)R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\qquad(38)$$

по сравнению с наилучше возможным будет служить нахождение правильного порядка

$$\inf_{\substack{(l^N,\varphi_N)\in D_N,\\ \varphi_N\in W_2^{\rho(y)}(E_s)}}\ \sup_{f:\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(\cdot)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\qquad(39)$$

– *информативной мощности набора* $D_N$ *вычислительных агрегатов* $\left(l^N,\ \varphi_N\right)$, что составляет Компьютерный (вычислительный) поперечник в применении к преобразованию Радона в части **К(В)П-1** (см. [12-13, 15-16, 19]).

Совпадение порядковых величин (38) и (39) будет означать оптимальность вычислительного агрегата (если таковой есть), реализующего порядок в (38), по всей возможной линейной информации (базовую информацию об этом можно найти в [13]), - здесь показательный пример в случае $\alpha(y)=\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{r}{2}}$ и $\rho(y)=\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{0}{2}}$ дает Теорема 6 в описании Замечания 5.

Представляют несомненный интерес вычислительные агрегаты, расположенные между (38) и

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}\asymp\qquad(40)$$

$$\asymp\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi_k)R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}.$$

Наборы вычислительных агрегатов $\left(l^{(j)}(f),\varphi_N\right)$ $(j=1,...,4)$ из Теоремы 6 с произвольным алгоритмом $\varphi_N(z_1,...,z_N;x)$ переработки числовой информации $l_1(f),...,l_N(f)$ относятся к таковым. Другие потенциально возникнут в процессе развития теории Компьютерной томографии.

$4^0$. **Автоматическое реагирование вычислительного агрегата на гладкость.** Поскольку вычислительные агрегаты $\sum_{k=1}^N Rf(\xi_k)\,R^{-1}(\Phi(y-\xi_k))(x)$ и $\sum_{k=1}^N R^{-1}f(\xi_k)\,R(\Phi(y-\xi_k))(x)$ не зависят от принадлежности приближаемой функции $f(x)$ какому-либо классу гладкости, и потому для каждой конкретной функции нет необходимости устанавливать гладкость, поскольку она находится в зоне действия всякой теоремы, обеспечивающей соответствующую скорость ее восстановления, то, как говорят, алгоритм приближения «автоматически реагируют на гладкость» (то же самое говорилось о квадратурных формулах Коробова в [20-25]).

К таковым относятся следующие конкретные реализации соотношений (40):

a) Для классов Соболева $W_2^r(E_s)$ и таких же классов Никольского-Бесова $B_{p,\theta}^r(E_s)$ (Теорема 6)

$$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1,...,k_s) \\ k_j=1,...,n \\ (j=1,...,s)}} \left(R^2\right)^{-1} \mathrm{R}f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s \\ -n\le m_j\le n \ (j=1,\ldots,s)}} \int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y-\frac{k}{n}\right)\right) dy$$

b) Для классов Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r(E_s)$, им подобных классов Коробова $E_s^r$ и $SB$ - классов Никольского-Бесова-Аманова с доминирующей смешанной разностью

- по линейным комбинациям сеток Коробова (Теорема 7)

$$\sum_{\substack{\tau\in Z^s: \\ \tau_j>0, \|\tau\|<n}} \frac{1}{detA_{n,\tau}} \sum_{k\in K(n,\tau)} \left(R^2\right)^{-1} \mathrm{R}f\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right) \sum_{m\in\rho(\tau)} \int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y-k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\right) dy$$

- по сеткам типа Смоляка (Теорема 8)

$$\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\Omega\subset Z_{\nu_0}^s} \frac{1}{2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \ldots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \int_{y\in R_x^{s-1}} \left\{\prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1} \left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] \exp\left(2\pi i n_j\left(y_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right)\right\} dy.$$

В связи с чем приведем пример оптимального вычислительного агрегата (см.[26]), напрямую связанного с гладкостью восстанавливаемой функции: Лагранжев сплайн степени $r-1$

$$L_{N,r}^{(i)}(x;f) = \sum_{\tau=0}^{r-1} f\left(\frac{i(r-1)+\tau}{N}\right) \prod_{\substack{t=0 \\ t\neq\tau}}^{r-1} \frac{N}{\tau-t}\left(x-\frac{i(r-1)+t}{N}\right) \quad \left(\frac{i(r-1)}{N}\le x\le\frac{(i+1)(r-1)}{N}\right)$$

оптимален в классе $W_p^r(0,1)$ ($r=1,2,...;\ 2\le p\le+\infty$) в метрике $L^q(0,1)$ ($2\le q\le+\infty$) среди всех вычислительных агрегатов $\varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);\ x)$, построенных по всевозможной линейной информации от функционалов $l_1,...,l_N$ при любых алгоритмах восстановления $\varphi_N(z_1,...,z_N;\ x)$.

В этом контексте остается открытым практический вопрос о количестве узлов $N$ в используемом вычислительном алгоритме. Когда конкретная гладкость искомой функции не установлена, то выбор $N$ не может опираться на какую либо теорему о скорости восстановления $\tau(N)$ в зависимости от $N$, когда по требуемой точности $\varepsilon>0$ за число $N$ берется решение уравнения $\tau(N)=\varepsilon$. Поэтому при использовании вычислительного агрегата напрямую количество узлов придется подбирать методом "проб и ошибок", последовательно увеличивая $N$ до достижения поставленной цели.

**$5^0$. Программное обеспечение компьютерной реализации теоретических результатов исследований в теории Компьютерной томографии в свете «гибкого» гильбертова пространства Соболева и Компьютерного (вычислительного) поперечника представляет собой отдельную тему Computer Sciences.**

$6^0$. **Самостоятельную тему исследований представляет собой сравнительный анализ известных методов Компьютерной томографии с предлагаемыми в данной статье.**

$7^0$. **Практические перспективы инновационного характера**. В контексте математической составляющей Нобелевской премии 1979 года А. Кормака и Г. Хаунсфилда по медицине результаты данной статьи в Компьютерной томографии перед индустрией Казахстана ставят вопросы:

– Можно ли перепрограммировать на алгоритмы из п. $4^0$ действующие приборы Компьютерной томографии, какие новые требования могут быть сформулированы для проведения соответствующих математических исследований по разработанным ИТМиНВ технологиям?

– Может ли Казахстан производить новые приборы Компьютерной томографии по своим алгоритмам от ИТМиНВ, в которых по *Компьютерному (вычислительному) поперечнику – К(В)П* представляется возможность рассчитать допустимые без потери качества изображения погрешности сканирования, что удешевляет производство техники и уменьшает время облучения?

– Для 3D-печатания человеческих органов сначала надо получить Компьютерную томографическую модель, что экономным путем будет выполнено наилучшей по линейной информации Компьютерной программой от ИТМиНВ.

– Неулучшаемые алгоритмы Компьютерной томографии данной статьи имеют новые эффективные применения в геологоразведке, в изучении состояния нефтяных скважин, внутреннего строения различных материалов, и так можно долго перечислять.

**$8^0$. Отдельную ветвь Компьютерной томографии,** относящейся к Интегральной геометрии, составляет замена в определении преобразования Радона

$$Rf\left(x\right) := \int_{y\in R_x^{s-1}} f\left(y\right)dy$$

гиперплоскости $R_x^{s-1}$ на специальным образом параметризованные гиперповерхности, в которые методы данной статьи могут внести какую-либо новизну. Не исключено, что предложенная здесь Схема исследований применима и к другим Преобразованиям.

**$9^0$. Большой спектр исследовательских задач** открывается в применениях методов данной статьи в разных направлениях Математики (Обратные задачи, Дифференциальные уравнения, Математическая физика, Теория представлений) и Физики (Геофизика и Радиоастрономия), об этом см. также [3].

$10^0$. **Двумерное преобразование Радона с точностью до нормы в [27]**

$$\|g\|_{W_2^{\beta}(Z)} := \|g\|_{W_2^{\beta}(R^2)}$$

**приводит еще к одному виду восстановления в Компьютерной томографии**

$$\sup_{f\in W_2^r(\Omega)} \left\| f\left(x_1,\quad x_2\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_{\Omega}\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\left(R^2\right)^{-1}R\left(D_N\left(y_1-\frac{k_1}{n},y_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho}(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r-\rho}{2}}. \tag{41}$$

В статьях [3-4] в условиях [27] установлено следующее.

Пусть дано открытое множество $\Omega$, вместе со своим замыканием содержащееся во внутренности $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)^2$ единичного квадрата $E_2 \equiv \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$ и пусть пространство Соболева $W_2^r(\Omega)$ состоит из всех функций $f(x)$, определенных на множестве $\Omega$ и доопределенных нулем до $R^2$ в виде $f_\Omega(x)$, равном $f(x)$ или 0 в зависимости от того, $x\in\Omega$ или $x\in R^2\backslash\Omega$, с конечной нормой

$$\|f_\Omega\|_{W_2^r(R^2)} \overset{(6)-(7)}{=} : \|f\|_{W_2^r(\Omega)} \qquad (r\geq 0).$$

Тогда имеет место утверждение в формате К(В)П-1 $(N=n^2,\ n=2,3,\dots)$:

$$N^{-\frac{r}{2}} \asymp \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N - \text{всевозможные линейные} \\ \text{функционалы над } W_2^r(\Omega),\varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(\Omega)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \inf_{\substack{(y_1^{(\tau)},\ y_2^{(\tau)})\in E_2 \\ (\tau=1,\dots,N)}} \sup_{f\in W_2^r(\Omega)} \left\|f(x)-\varphi_N\left(Rf\left(y_1^{(1)},\ \ y_2^{(1)}\right),\dots,Rf\left(y_1^{(N)},\ \ y_2^{(N)}\right);x\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{f\in W_2^r(\Omega)} \left\|f(x_1,\ \ x_2)-\frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)R^{-1}\left(D_N\left(y_1-\frac{k_1}{n},y_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)(x_1,x_2)\right\|_{L^2(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r}{2}},$$

где $R^{-1}$ есть обращение преобразования Радона $Rf$,

$$D_N(x_1,\ x_2)=D_n(x_1)\cdot D_n(x_2)\,,D_n(x_i)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n} cos2\pi kx_i\quad(i=1,2)$$

– двумерные ядра Дирихле.

Особый случай из [27] состоит в эквивалентности соответствующих норм преобразования Радона $Rf$ и порождающей его функции $f$ в одной и той же шкале двумерных Соболевских гильбертовых пространств $W_2^\beta\left(R^2\right)$.

Именно, пусть дан цилиндр

$$Z:=\left\{(\theta_1,\theta_2,\tau)\in R^3:\theta_1=cos2\pi u,\ \theta_2=sin2\pi u\left(-\frac{1}{2}\le u\le\frac{1}{2}\right);\ -\infty<\tau<+\infty\right\}.$$

Соболевское гильбертово пространство $W_2^\beta(Z)$ на цилиндре $Z$, по определению, состоит из функций

$$g(u,\tau)\equiv g(cos2\pi u,sin2\pi u;\tau)\ \ \left(-\frac{1}{2}\le u\le\frac{1}{2},-\infty<\tau<+\infty\right)\ ,$$

для которых конечна норма

$$\|g\|^2_{W_2^\beta(Z)}:=\sum_{k+l\le\beta}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u\partial^l\tau}g(u,\tau)\right|^2 dud\tau=\|g\|^2_{W_2^\beta(R^2)},\tag{42}$$

где $\beta$ целое положительное, для всех положительных действительных чисел $\beta$ пространство $W_2^\beta$ (Z) определяется интерполяцией норм (42) (см. [28, Глава I, 2.1]).

И, что есть решающее для результатов статей [3-4] утверждение, в приведенных определениях [27]:

Если $\Omega\subset R^2$ *ограниченная область*, то нормы

$$\|Rf\|_{W^{\beta+\frac{1}{2}}(\Omega)}=\|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{1}{2}}(Z)}\ u\ \|f\|_{W_2^\beta(\Omega)}$$

*эквивалентны в* $C_0^\infty(\Omega)$.

Тем самым, для всех действительных $\beta\ \ge\ 0$ выполнены соотношения $\left(W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{0}{2}}}(\Omega)\equiv L^2(\Omega)\right)$

$$\|Rf\|_{W_2^{\beta+\frac{1}{2}}(\Omega)}\asymp\|f\|_{W_2^\beta(\Omega)}\quad\text{и}\quad\|f\|_{W_2^{\beta+\frac{1}{2}}(\Omega)}\asymp\left\|R^{-1}f\right\|_{W_2^\beta(\Omega)},\tag{43}$$

откуда, по Теореме А, справедливой для $\gamma > 1, \quad 0 \leq \lambda < \gamma$ теоремы восстановления функций,

$$\sup_{g:\|g\|_{W_2^{\gamma}(\Omega)}\leq 1} \left\| g\left(x_1, x_2\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1,k_2=1}^{n} g\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right) D_N\left(x_1 - \frac{k_1}{n}, x_2 - \frac{k_2}{n}\right)\right\|_{W_2^{\lambda}(\Omega)} \asymp N^{-\frac{\gamma-\lambda}{2}} \ \left(N = n^2; n = 2, 3, \dots\right), \tag{44}$$

последовательно имеем следующую цепочку доказательств при $r > 1, \quad 0 \leq \rho < r$.

Пусть $f$ принадлежит пространству $W_2^r(\Omega)$, тогда из (43) следует принадлежность $Rf$ пространству $W_2^{r+\frac{1}{2}}(\Omega)$, поэтому применяя (44) для $g = Rf$ при $\gamma = r + \frac{1}{2}$ и $\lambda = \rho + \frac{1}{2}$ получаем

$$N^{-\frac{r-\rho}{2}} \asymp \sup_{\|f\|_{W_2^r(\Omega)} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq 1} \left\| Rf(x) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=(k_1,k_2):k_1,k_2=1,\dots,n}^{n} Rf\left(\frac{k}{n}\right) D_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right\|_{W_2^{\rho+\frac{1}{2}}(\Omega)}. \tag{45}$$

Опять же, для

$$g = Rf(x) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=(k_1,k_2):k_1,k_2=1,\dots,n}^{n} Rf\left(\frac{k}{n}\right) D_N\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

из (43) будем иметь

$$\|g\|_{W_2^{\gamma+\frac{1}{2}}(\Omega)} \asymp \left\|R^{-1}g\right\|_{W_2^{\gamma}(\Omega)}. \tag{46}$$

Согласно Теореме 1 соотношение $\asymp N^{-\frac{r-\rho}{2}}$ в (45) сохранится при замене погрешности

$$\left\| Rf(x) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=(k_1,k_2):k_1,k_2=1,\dots,n}^{n} Rf\left(\frac{k}{n}\right) D_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right\|_{W_2^{\rho+\frac{1}{2}}(\Omega)}$$

под знаком $sup$ и нормы $\|Rf\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq 1$, по которой берется $sup$, на им эквивалентные величины.

Соответствующие эквивалентные соотношения в (43), получаемые применением (44), такие.

Во-первых, под знаком $sup$ применение (44) при $\gamma = \rho$ и $g = g(x) = Rf(x)$ приводит к

$$\begin{aligned} &\left\| Rf(x) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=(k_1,k_2):k_1,k_2=1,\dots,n}^{n} Rf\left(\frac{k}{n}\right) D_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right\|_{W_2^{\rho+\frac{1}{2}}(\Omega)} \overset{(46)}{\asymp} \\ &\asymp \left\| R^{-1}\left( Rf\left(x\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=(k_1,k_2):k_1,k_2=1,\dots,n}^{n} Rf\left(\frac{k}{n}\right) D_N\left(x - \frac{k}{n}\right)\right)\right\|_{W_2^{\rho}(\Omega)} \overset{R^{-1}(Rf)=f}{=} \\ &= \left\| f\left(x\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=(k_1,k_2):k_1,k_2=1,\dots,n}^{n} Rf\left(\frac{k}{n}\right) R^{-1}\left(D_N\left(y - \frac{k}{n}\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{47}$$

Во-вторых, то же при $\gamma = r$ и $g = Rf$ дает

$$1 \geq \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}(\Omega)} \overset{(46)}{\asymp} \left\|R^{-1}\left(Rf\right)\right\|_{W_2^{r}(\Omega)} \overset{R^{-1}(Rf)=f}{=} \|f\|_{W_2^{r}(\Omega)}. \tag{48}$$

В итоге соотношения (45), (47) и (48) приводят к (43), частично более сильному утверждению, нежели К(В)П-1 в [3-4]: при всех $r > 1$ и $0 \leq \rho < r$

$$\sup_{\|f\|_{W_2^r(\Omega)}\leq 1} \left\| f\left(x_1, \ x_2\right) - \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_{\Omega}\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right)\left(R^2\right)^{-1} R\left(D_N\left(y_1 - \frac{k_1}{n}, y_2 - \frac{k_2}{n}\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho}(\Omega)} \asymp N^{-\frac{r-\rho}{2}}.$$

$11^0$. **К(В)П-2 и К(В)П-3 исследования в Компьютерной томографии для размерности $s \geq 3$.** В двумерном случае утверждения К(В)П-2 и К(В)П-3 такие [3-4]:

*К(В)П-2 (версия «равно $\tilde{\sigma}_N$»). Для вычислительного оператора*

$$\frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right) R^{-1}D_N\left(x_1-\frac{k_1}{n}, x_2-\frac{k_2}{n}\right),$$

*и для величины $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$ выполняются соотношения:*
*Во-первых,*

$$\sup_{f\in H_0^r(\Omega)} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\tilde{\sigma}_N\right)\left(R^2\right)^{-1} RD_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \succ\prec N^{-\frac{r}{2}}.$$

*Во-вторых, для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\sigma}_N \equiv \eta_N N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}; \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)\left(R^2\right)^{-1}RD_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right)_{L^2(\Omega)}}{\delta_N\left(0; \mathrm{L}_N(H_0^r(\Omega))\times\{\varphi_N\}_{L^2(\Omega)}\right)_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

*К(В)П-2 (версия «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$»). Для данного вычислительного оператора и для величины $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ выполняются соотношения:*

$$\sup_{\substack{f\in H_0^r(\Omega)\\ \left|\gamma_N^{(k_1,k_2)}\right|\leq 1}} \left\| f(x_1,x_2) - \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(Rf_\Omega\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right)+\gamma_N^{(k_1,k_2)}\bar{\varepsilon}_N\right)\left(R^2\right)^{-1} RD_N\left(x_1-\frac{k_1}{n},x_2-\frac{k_2}{n}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \succ\prec N^{-\frac{r}{2}}.$$

Тем самым, при погрешности вычисления преобразования Радона с точностью не большей $\bar{\varepsilon}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)}$ итоговой потери точности восстановления $f$ не будет.

В то же время, если в вычислении преобразования Радона ошибаться на постоянную величину $\tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$, то также не произойдет потери итоговой точности, но это обрушится для $\eta_N\tilde{\sigma}_N$, – любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ последовательности $\{\eta_N\}$.

*Вопрос об окончательности погрешности $\bar{\varepsilon}_N$ в версии «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$», когда необходимо выяснить, найдется или не найдется $\bar{\eta}_N \to +\infty$ такая что $\bar{\varepsilon}_N\bar{\eta}_N =: \tilde{\varepsilon}_N$ будет предельным в версии «не больше $\tilde{\varepsilon}_N$», остается открытым (известно только то, что $N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{3}{4}\right)} = \bar{\varepsilon}_N \leq \tilde{\varepsilon}_N \leq \tilde{\sigma}_N = N^{-\left(\frac{r}{2}+\frac{1}{4}\right)}$).*

Для вычисления обратного преобразования Радона $R^{-1}g$ в общем случае [2, V. 2. Фурье-алгоритм] выписана специальная процедура высокой эффективности и с тщательным анализом ошибок. Не исключено, что Фурье-алгоритм для конкретного случая ядра Дирихле $R^{-1}D_N(x_1,x_2)$, к вычислению чего Основная теорема сводит всю процедуру Радонского сканирования, будет приемлемым.

Отметим, что доказательство Основной теоремы полностью составляют результаты, ранее полученные при К(В)П-исследовании проблемы численного дифференцирования [5], применение к преобразованию Радона обеспечивается ее особенностью, заключенной в соотношении (в двумерном случае $s=2$) $\|f\|_{W_2^r} \asymp \|Rf\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}}}$.

**Замечание 7.** Внутренняя сила Главного эквивалентного соотношения (32) в Теореме 2, подготовленного во вспомогательной Теореме 1, оставалась бы нераскрытой только уровня потенциально ожидаемого. Именно, если бы не развитая теория Компьютерного (вычислительного) поперечника в 22 статьях из 28 в Списке литературы, позволившая установить как глубоко самостоятельного значения, так и иллюстративного характера теоремы 4 и 6-8. Оставшиеся шесть публикаций – это справочного назначения четыре освещения темы Компьютерной томографии, и ещё две. Одна из них –

это демонстрационный пример сложной задачи, содержащей много подзадач с явными решениями, в продолжение этих достоинств расплачивающаяся тем, что полный ответ может иметь непрезентабельный вид, и все такое может ожидать возникшую здесь эквивалентную тематику. Другая вспомогательная – технического переноса от целых показателей к любым.

## Список литературы

1 Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Жубанышева А.Ж., Формула Планшереля для преобразования Радона в гибкой шкале гильбертовых пространств Соболева// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. -2022. -Т. 141. №4. -С. 42-50.

2 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 226 p.

3 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е., Жубанышева А.Ж. Теория преобразования Радона в концепции Компьютерного (вычислительного) поперечника и методов теории квази-Монте Карло//Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки.-2019.-Т.**129**. №4.-С. 89-135

4 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Ажгалиев Ш.У., Таугынбаева Г.Е. Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази Монте-Карло //Изв. вузов. Матем. -2020.- №3.- С. 98-104.

5 Темиргалиев Н., Жубанышева, А.Ж. Порядковые оценки норм производных функций с нулевыми значениями на линейных функционалах и их применения // Изв. вузов. Матем. -2017. - №3. -С. 89-95.

6 Quinto E.T. The dependence of the generalized Radon transform on defining measures. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 257, 331-346.

7 Mueller R.K., Kaveh M., Wade G. Reconstructive Tomography and applications to ultrasonic. Proceedings of the IEEE, (1979), 67, 567-587. [Перевод: Мюллер Р.К., Кавех М., Уэйд Г. Реконструктивная томография и ее применение к ультразвуковой технике. ТИИЭР, 1979, т. 67, №4, с. 146-169.]

8 Шерниязов К.Е. Оптимальные методы приближенного восстановления функций и решений уравнений в частных производных вычислительными агрегатами по линейным комбинациям сеток Коробова со сверхсжатием информации и смежные вопросы// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. -2022. -Т. 139. №2. -С. 26-76.

9 . Шерниязов К. Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E, SW и B: Кандидатская диссертация по спец. 01.01.01 – Математический анализ. Алматы, 1998.

10 Темиргалиев Н., Наурызбаев Н.Ж., Шоманова А.А. Аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов «Типа Смоляка» с ядрами Дирихле, Фейера и Валле-Пуссена в шкале классов Ульянова // Известия вузов. Математика. 2015. №7. -С. 75-81.

11 Темиргалиев Н. Тензорные произведения функционалов и их применения // Докл.РАН. -2010. -Т. 430. №4. -С. 460-465.

12 Научно-исследовательский потенциал ИТМиНВ – это «Научная Программа В», понимание которой обеспечивается «Учебная Программа А», в Сборнике трудов Международной научной и научно-методической конференции «Математика, Компьютерные науки и Цифровые технологии в преподавании и в научных исследованиях», посвященной 75-летнему юбилею Математика Нурлана Темиргалиева, Орал, 7-10 декабря 2022 года, стр.121-145.

13 Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж. Теория приближений, Вычислительная математика и Численный анализ в новой концепции в свете Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. -2018. -Т. 124. №3. -С. 8-88.

14 Коляда В.И. О вложении классов $H^{\omega_1,\dots,\omega_p}$ // Матем. сб. -1985. -Т. 127(169) -№3. -С. 352-383.

15 Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье // Вест. ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л. Н. Гумилева - 2010. -С. 1-194.

16 Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. -2018. -Т.125. -№4. -С.8-68.

17 Абикенова Ш.К., Темиргалиев Н. О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифф. уравн., т. 46, №8, 2010, стр. 1201-1204.

18 Абикенова Ш. К., Утесов А., Темиргалиев Н. Т. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. заметки, 2012, том 91, №3, стр. 459-463.

19 Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н.Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2019. -Т.126. -№1. -С.8-51.

20 Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных //Матем. сб. -1990ю -Т. 281. №4. -С. 490-505.

21 . Темиргалиев Н. Об эффективности алгоритмов численного интегрирования, связанных с теорией дивизоров в круговых полях //Матем. заметки, 1997. №2. С. 297-301.

22 Баилов Е. А., Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных //Докл. РАН. -2007. -Т. 416. №№2. -С. 169-173.

23 Жубанышева А. Ж., Темиргалиев Н., Темиргалиева Ж. Н. Применение теории дивизоров к построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул //Журнал вычислительной математики и математической физики. -2009. -Т. 49. №1. -С. 14-25.

24 Сихов М., Темиргалиев Н. Об алгоритме построения равномерно распределенных сеток Коробова // Матем. замет. -2010. -Т. 87. №6. -С. 948-950.

25 Баилов Е. А., Сихов М. Б., Темиргалиев Н. Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных // Журнал вычислительной математики и математической физзки. -2014. -Т. 54. №7. -С. 1059-1077.

26 Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника // Изв. вузов. Матем. -2013. №8. -С. 86-93.

27 Natterer F. A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction// SIAM Journal on Applied Mathematics, -1980. -Vol. 39. №. 3.-P.402-411.

28 Lions J.L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, Paris, 1968.

**Н. Темірғалиев, Ш.К. Абикенова, Ш.У. Ажгалиев, Е.Е. Нурмолдин, Г.Е. Тауғынбаева, А.Ж. Жұбанышева**

*Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Қажымұқан көш., 13, Астана, 010008, Қазақстан*

**Компьютерлік томография есебін зерттелінген функцияны «икемді» гильберттік Соболев және Соболев-Радон кеңістіктері нормаларында ақырлы үйірткімен «Компьютерлік (есептеуіш) диаметр» тұрғысында жуықтау есебіне пара-парлығы**

**Аннотация.** Компьютерлік томографияны сыртқы қабығын бұзбай сәулелендіруден алынған мәліметпен дененің ішкі құрылымын анықтайтын өмірлік қажеттіліктер құрайды. Осы мақалада ұсынылған жалпыға түсінікті және барлық жерде қолданыстағы мәселенің кейіннен инженерлік жүзеге асырумен жалғасатын математикалық теория тұрғыда ғана мүмкін шешу форматы жаңа жуықтау формулалары түрінде екі өлшемді Декарттық координаталар жүйесі енгізілген жазықтықта 2019 жылы авторлармен түбегейлі зерттелген. Ұсынылып отырған еңбекте Компьютерлік томографияның іргелі мәселелері мен бұрыннан белгілі және жаңа мазмұнда жасалған тор түйініндегі сканерленген мәндердің арнайы құрылған ұйтқымен ақырлы үйірткісі түріндегі операторлар арқылы жуықтау есептері барлық өлшемдер үшін күтпеген дәрежедегі толық пара-парлығына дейін жеткізілген:

$$sup\left\{\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^{2}\right)^{-1}Rf\left(\xi_{k}\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_{k}\right)\right)\left(x\right)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)}:f\in W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^{1}\right)\right\}\asymp$$

$$\asymp sup\left\{\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f\left(\xi_{k}\right)\Phi(x-\xi_{k})\right\|_{L^{2}(E_s)}:f\in W_2^{\alpha(y)}\left(E_s\right)\right\},$$

Математикада (басқа ғылымдарда да) қандай да бір тақырыпқа серпіліс жасалды деп жариялау принципиалді мәні бар нәтижелермен бекітілуі міндетті. Алынған пара-парлықтың жұмыс бөлігін құрайтын 1996 жылы бірінші (тізім бойынша) автор ұсынған және Қазақстанда мазмұнды дамытылған Компьютерлік (есептеуіш) диаметр (К(Е)Д) есебі Компьютерлік томографияда кең көлемде иллюстрациялық және іргелі қорытындылар үшін жеткілікті қолдануға дайын болып шықты. Дәл айтқанда, К(Е)Д теориясының кең көлемді қойылымы мен өзіндік нәтижелері Компьютерлік томографияны бірден автоматты түрде жаңа теориялық және тікелей практикалық қолдануға әкелді, сканерленген шамалар бойынша Томографияның есептеу бірлігінің айқын формулаларындағы аналитикалық өрнекті қоса алғанда. Соның ішінде компьютерлік томографияда Радон түрлендіруінен жақсы сканерлеу әдісі жоқ деген қорытынды беретін нәтижеге де қол жеткізілді.

**Түйін сөздер:** Радон түрлендіруі, Гильберттік икемді Соболев кеңістігі, Гильберттік икемді Соболев-Радон кеңістігі, Радон түрлендіруі үшін Планшерел формуласы, функцияны өз нормалары бойынша жуықтау есептерінің эквиваленттілігі.

**Ұғымдар, формулалар мен алгоритмдердегі Компьютерлік томографияның жаңа парадигмасы.** Компьютерлік томографияның дәстүрлі зерттеулеріне түбегейлі өзгеріс әкелетін серпілісті идея ұсынылады.

$f(x)$ функциясы үшін

$$Rf(x) := \int_{y\in R_x^{s-1}} f(y)\,dy =: R(f(y))(x)$$

операторы Радон түрлендіруі деп аталады.

Көпөлшемді Компьютерлік томография теориясында $R_x^{s-1}$ гипержазықтықтары және бірлік $S^{s-1}$ сферасымен $R^1$ сандық түзуінің тіке көбейтіндісі болатын цилиндр бойынша алынған интегралдар негізінде денені сканерлеудегі мәлімет $Rf$ Радон түрлендіруі мен оның ізделінді $f$ тығыздығы арасындағы байланысты беретін арнайы Паншерел формуласы анықталған гильберттік Соболев кеңістіктерінің жаңа түрлері табиғи түрде және қалтқысыз пайда болды.

$R^s\backslash\{0\}$ жиынында оң мәнді, үзіліссіз және $y_j \to +\infty$, басқа айнымалылар бекітілген жағдайында $\alpha(y_1,...,y_s)\to+\infty$ пен $\rho(y_1,...,y_s)\to+\infty$, солармен бірге

$$\rho(y_1,...,y_s) = o(\alpha(y_1,...,y_s))\,(y_1\to+\infty,\ldots,y_s\to+\infty)$$

шартымен өзара байланысқан $\alpha(y)=\alpha(y_1,...,y_s)$ мен $\rho(y)=\rho(y_1,...,y_s)$ функциялары берілсін.

$W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ *гильберттік икемді Соболев кеңістігі* деп

$$\|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} := \int_{R^s}\alpha^2(y)\left|\int_{R^s} f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx\right|^2 dy < +\infty, \quad W_2^0(R^s)\equiv L^2(R^s)$$

нормалары ақырлы $f(x)$ функцияларының жиыны аталады.

$W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^1\right)$ *Гильберттік икемді Соболев-Радон* атты *кеңістікті*

$$\|g\|^2_{W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} := \int_{S^{s-1}}\int_{R^1}\alpha^2(t\theta)\left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta,\tau)e^{-2\pi i t\tau}d\tau\right|^2 d\theta dt.$$

нормалары ақырлы $Z := S^{s-1}\times R^1$ цилиндрінде анықталған $g(\theta,t)$ функциялар жиыны құрайды.

Негізгі жұмыс құралы - *Иоганн Радон түрлендіруі үшін Паншерел формуласы* (бұл атауды Израиль Моисеевич Гельфанд 1965 жылғы монографиясында берген, теңдіктің сандық орындалуы 1960 жылдары Юрий Григорьевич Решетняктің жарияланбаған мақаласында алынған болса, *Решетняктің жалпыланған формуласы* жазбасымен ең кең сандық нұсқасын 2021 жылы В.А. Шарафутдинов алды)

$$\sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)} = \|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}.$$

теңдігінен тұрады.

Компьютерлік томографияның барлық мәселелерін гильберттік Соболев кеңістігіндегі функцияларды ақырлы үйірткімен жуықтау теориясына әкелетін *тиімді жұмыс атқарушы* $\left(E_s\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^N\left(R^2\right)^{-1}f(\xi_k)R(\Phi(y-\xi_k))(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)},$$

*қатынасы* орындалады.

Сонымен қатар, жаңа нәтижелерге қол жеткізу үшін *белгілiнi қолдануға және* $L^2(E_s)$ *бойынша жаңа нәтижелерді алу үшін бағыттарды қалыптастыруда - барлық мүмкін сызықтық мәліметтер бойынша жақсартылмайтын жуықтауда* оның дербес жағдайы

$$\rho(y) = \left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}\,(\rho\ge 0),$$

$$\|f\|_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} \overset{\rho=0}{=} \|f\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)},$$

$$\|f\|^2_{W_2^{\rho}(R^s)} \equiv \|f\|^2_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}}(R^s)} =$$

$$= \int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{\rho}\left|\hat f(y)\right|^2 dy \overset{\rho=0}{\Rightarrow} \int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{0}\left|\hat f(y)\right|^2 dy = \int_{R^s}\left|\hat f(y)\right|^2 dy = \|f\|^2_{L^2(R^s)},$$

және

$$\inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N - \text{барлық мүмкін} \\ \text{функционалдар } W_2^{\alpha(y)}(E_s), \quad \varphi_N}} \sup_{f\in W_2^{\alpha(y)}(E_s)} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\ldots,l_N(f);x)\|_{L^2(E_s)} \ll$$

$$\ll \inf_{\xi_k\in E_s(k=1,\ldots,N),\ \Phi:E_s\to R^1} \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1} \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)} \asymp$$

$$\asymp \inf_{\xi_k\in E_s(k=1,\ldots,N),\ \Phi:E_s\to R^1} \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1} \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{N} R^{-1} f(\xi_k) R\left(\Phi(y-\xi_k)\right)(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} \ll$$

$$\ll \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1} \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1} \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) R\left(\Phi(y-\xi_k)\right)(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1} \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(\xi_k) \int_{y\in R_x^{s-1}} \Phi(y-\xi_k)\,dy\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)} =$$

$$\overset{\substack{x=t\theta,\\ \xi_k=t_k\theta_k}}{=} \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1} \left( \int_{S^{s-1}\times R^1} t^{s-1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(\tau\theta) - \sum_{k=1}^{N} \left(R^2\right)^{-1} Rf(t_k\theta_k) \int_{y\in R_{\tau\theta}^{s-1}} \Phi(y-t_k\theta_k)\,dy \right] d\tau \right|^2 dt d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1} \left\| f(x)-\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}$$

болып табылады.

Инновациялық қолданулар келесідей. Зерттелетін объектінің Математикалық моделіне сәйкес алдын ала берілген дәлдік бойынша Жуықтау теоремасынан сканерлеуге қажет түйіндердің саны алынады. Сол сан бойынша құрылған жуықтау агрегаты ізделінді тығыздыққа аталған дәлдікпен алгоритмге айналады. Ал алгоритмнің өзінде қай нүктелерде сканерлеу керектігі мен осы алынған сандық мәліметтер бойынша тығыздықтың кез келген нүктедегі мәнін есептеу процедурасы беріледі.

Егер зерттелетін құбылыстар

$1^0$. Соболев $W$ және Никольский-Бесов $B$ кластарымен сипатталса, онда сканерлеу бірқалыпты таралған тордың түйіндерінде жүргізіледі:

$$\frac{1}{n^s} \sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_s)\\ k_j=1,\ldots,n\,(j=1,\ldots,s)}} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s\\ -n\le m_j\le n\ \ (j=1,\ldots,s)}} \int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y-\frac{k}{n}\right)\right) dy$$

$2^0$. Коробов $E$, Соболев $SW$ және Никольский-Бесов-Аманов $SB$ кластарымен сипатталса, онда

– Коробов торының сызықты комбинациясы түріндегі Қайрат Шерниязов торында сканерлеу жүргізіледі

$$\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}} \frac{1}{detA_{n,\tau}} \sum_{k\in K(n,\tau)} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right) \sum_{m\in\rho(\tau)} \int_{y\in R_x^{s-1}} exp\left(2\pi i\left(m, y-k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\right) dy$$

– Функционалдардың тензорлық көбейтіндісі әдісінен туындаған Смоляк түрлі торларының түйіндерінде сканерлеу өткізіледі

$$\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\Omega\subset Z_{\nu_0}^s} \frac{1}{2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left(R^2\right)^{-1} Rf\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \int_{y\in R_x^{s-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1} \left[ \lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] \exp\left(2\pi i n_j\left(y_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right)\right\} dy.$$

Компьютерлік томография бойынша қол жетімді ғылыми әдебиеттерде ізделінді $f(x)$ тығыздығын Радон түрлендіруінен өткен нақты ұйтқымен тордағы $Rf$ түрлендіруінің $(R^2)^{-1}$ бейнесі бойынша құрылған ақырлы үйірткі түрінде жуықтау кездеспеді. Дегенмен, мұнда Есептеу математикасының мазмұнын құрайтын күрделі объектіні есептелетін объектімен ауыстыру қажетті дәлдікке жетпейінше мүлдем пайдасыз - себебі, $100-1=99$ дәлдігіен $1=100$ және, жалпы алғанда, $|a-b|$ дәлдігімен $a=b$. Қажетті қателікті қамтамасыз ететін бағалаулар Компьютерлік (есептеуіш) диаметрдің белгілі нәтижелерінен табылады да, сол мазмұндағы жаңа есептер қойылады.

Егер қолданылған әдебиет тізіміндегі 28 басылымның 22 мақаласында дамытылған Компьютерлік (есептеуіш) диаметр теориясы болмаса, онда

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N} f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}$$

түріндегі пара-пар Басты қатынастың ішкі қуаты ашылмай, потенциалды күтілетін болып қала берер еді. Бұндағы ерекше жігерге толы жаңалықтарды, оған қоса өзіндік терең және көрнекілік сипаты бар, төрт теорема жарқын түрде паш етеді. Әдебиет тізбесіндегі қалған алты басылымдардың төртеуі Компьютерлік томография тақырыбындағы қажетті мәліметтерді беретін болса, екеуі – иллюстративті және көмекші сипатта.

**N. Temirgaliyev, Sh.K. Abikenova, Sh.U. Azhgaliyev, Y.Y. Nurmoldin, G.Y. Taugynbayeva, A.Zh. Zhubanysheva**

*Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhimukan str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan*

## Efficient reduction of Computed Tomography problems to the developed problem of recovery functions in the form of a finite convolution in the norms of "flexible" Hilbert Sobolev and Sobolev-Radon spaces according to the scheme of the Computational (numerical) diameter

**Abstract.** Computed tomography is a vital need to know the structure of the inside of the body from the information obtained from its transillumination without destroying the shell. The format presented here for solving this massively understandable problem, which can only be theoretical and mathematical with subsequent engineering implementation, is fundamentally expressed in the approximate formula established by the authors in 2019 in approximate formula on a plane with a two-dimensional Cartesian coordinate system. In this article, this breakthrough is brought to a complete surprise in the equivalence of the fundamental problems of Computed Tomography and both widely known and developed in new content continuations of the problems of recovery functions by operators of the form of finite convolution of values approximated at the grid nodes with specially constructed kernels:

$$sup\left\{\left\|f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}: f\in W_2^{\alpha(y)\|\dot{y}\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)\right\}\succ\prec$$

$$\succ\prec sup\left\{\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N} f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(E_s)}: f\in W_2^{\alpha(y)}\left(E_s\right)\right\}.$$

As is customary in Mathematics (in other sciences too), any claim for a breakthrough must be demonstrated in results of fundamental importance. In the resulting equivalence, the working part turned out to be in a state of enough for illustrative and, necessary, fundamental conclusions readiness according to the Computer Science offered by the first author (according to the list) in 1996 and filled in Kazakhstan with far from trivial content of the Computational (numerical) diameter (C(N)D). Namely, a wide range of developments in the theory of C(N)D instantly automatically leads to new theoretical and direct practical applications of advances in Computed Tomography, including analytic expressibility in explicit formulas of the computational aggregates of Tomography in terms of scanned quantities. Among them is also the conclusion that in Computed Tomography there is no better scanning method than the Radon transform.

**Key words:** Radon transform, flexible Hilbert Sobolev space, flexible Hilbert Sobolev-Radon space, Plancherel's formula for the Radon transform, equivalence of problems of recovery of functions by their norms.

**A new paradigm of Computed Tomography in concepts, formulas and algorithms.** A breakthrough idea is proposed, representing a fundamental change in traditional approaches to Computed Tomography.

*The Radon transform* of a function $f\left(x\right)$ is a function

$$Rf\left(x\right):=\int_{y\in R_x^{s-1}} f\left(y\right)dy=: R\left(f\left(y\right)\right)\left(x\right).$$

In the multidimensional theory of Computed Tomography, new types of Sobolev Hilbert spaces naturally and inevitably arose based on integrals over $R_x^{s-1}$ hyperplanes and cylinders as a direct product of the unit sphere $S^{s-1}$ and the real line $R^1$, which in a special way according to the Plancherel formulas connect the Radon transform $Rf$ as a tool for obtaining information from the scanned object with its desired density $f$.

On the set $R^s\backslash\{0\}$ are defined positive continuous functions $\alpha(y)=\alpha(y_1,...,y_s)$ and $\rho(y)=\rho(y_1,...,y_s)$, such that $\alpha(y_1,...,y_s)\to+\infty$ and $\rho(y_1,...,y_s)\to+\infty$ as $y_j\to+\infty$ and other variables are fixed, while being interconnected by the condition

$$\rho(y_1,...,y_s)=o(\alpha(y_1,...,y_s))\,(y_1\to+\infty,\ldots,y_s\to+\infty).$$

*The flexible Hilbert Sobolev space* $W_2^{\alpha(y)}(R^s)$ is the set of functions $f(x)$ with finite norm

$$\|f\|^2_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}:=\int_{R^s}\alpha^2(y)\left|\int_{R^s}f(x)e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}dx\right|^2dy<+\infty,\quad W_2^0(R^s)\equiv L^2(R^s).$$

On the cylinder $Z:=S^{s-1}\times R^1$, *the flexible Hilbert Sobolev-Radon space* is defined as the set of all functions $g(\theta,t)$ for which the norm is finite

$$\|g\|^2_{W_2^{\alpha(y)}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}:=\int_{S^{s-1}}\int_{R^1}\alpha^2(t\theta)\left|\int_{-\infty}^{+\infty}g(\theta,\tau)e^{-2\pi it\tau}d\tau\right|^2d\theta dt.$$

The main working tool - The Plancherel formula for the Johann Radon transform (such a name was given by Israel Moiseevich Gelfand in the monograph of 1965, the equality itself in numerical execution was obtained approximately in 1960 by Yuri Grigorievich Reshetnyak in an unpublished article, under the sign *Generalized formula of Reshetnyak*, the widest numerical version was established by V.A. Sharafutdinov in 2021) consists in the equality

$$\sqrt{2}\,\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(R^s)}=\|Rf\|_{W_2^{\alpha(y)\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}.$$

*Satisfies the following effective working relation* $\left(E_s\equiv\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^s\right)$

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)}\asymp$$

$$\asymp\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}f(\xi_k)R\left(\Phi(y-\xi_k)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\left(y_1^2+\cdots+y_s^2\right)^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)},$$

which reduces the entire problem of Computed Tomography to the Theory of Recovery of Functions by Finite Convolutions in Hilbert Sobolev Spaces.

At the same time, the most adapted *to the use of known and the formation of directions to obtain new results in* $L^2(E_s)$ *- approximations with the establishment of unimprovability from all possible linear information* is its special case

$$\rho(y)=\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}(\rho\ge0),$$

$$\|f\|_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\overset{\rho=0}{=}\|f\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)},$$

$$\|f\|^2_{W_2^{\rho}(R^s)}\equiv\|f\|^2_{W_2^{\left(1+\|y\|^2\right)^{\frac{\rho}{2}}}(R^s)}=$$

$$=\int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{\rho}\left|\hat f(y)\right|^2dy\overset{\rho=0}{\Rightarrow}\int_{R^s}\left(1+\|y\|^2\right)^{0}\left|\hat f(y)\right|^2dy=\int_{R^s}\left|\hat f(y)\right|^2dy=\|f\|^2_{L^2(R^s)},$$

with

$$\inf_{\substack{l_1,\ldots,l_N-\text{ all possible linear}\\ \text{functionals on } W_2^{\alpha(y)}(E_s),\quad\varphi_N}}\ \sup_{f\in W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\ldots,l_N(f);x)\|_{L^2(E_s)}\ll$$

$$\ll\inf_{\xi_k\in E_s(k=1,\ldots,N),\ \Phi:E_s\to R^1}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}\asymp$$

$$\asymp \inf_{\xi_k\in E_s(k=1,\ldots,N),\ \Phi:E_s\to R^1}\ \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}R^{-1}f(\xi_k)R\left(\Phi(y-\xi_k)\right)(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\ll$$

$$\ll \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}\asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi_k)R\left(\Phi(y-\xi_k)\right)(x)\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}=$$

$$=\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(\xi_k)\int_{y\in R_x^{s-1}}\Phi(y-\xi_k)\,dy\right\|_{W_2^{\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}=$$

$$\overset{\substack{x=t\theta,\\ \xi_k=t_k\theta_k}}{=}\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}\left(S^{s-1}\times R^1\right)}\le 1}\left(\int_{S^{s-1}\times R^1}t^{s-1}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(\tau\theta)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf(t_k\theta_k)\int_{y\in R_{\tau\theta}^{s-1}}\Phi(y-t_k\theta_k)\,dy\right]d\tau\right|^2dtd\theta\right)^{\frac{1}{2}}\asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}f(\xi_k)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{L^2(R^s)}.$$

Practical recommendations of an innovative nature are as follows. In accordance with the Mathematical model of the expert object, the formula of the Computer requirement is directly adopted, in accordance with the theory of correspondence recovery is the number of points where is needed to scan. Then the corresponding computational unit turns into an algorithm that, with the named accuracy, turns into the desired density of the object. In the algorithm itself, points are recorded at which you need to scan and the whole procedure is how to calculate the density at any point using these obtained numerical data.

If the phenomena being studied are described

$1^0$. Sobolev $W$ and Nikolsky-Besov $B$ classes, then scanning is performed at the nodes of a uniform grid:

$$\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_s)\\ k_j=1,\ldots,n\,(j=1,\ldots,s)}}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\frac{k}{n}\right)\sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s\\ -n\le m_j\le n\ (j=1,\ldots,s)}}\int_{y\in R_x^{s-1}}exp\left(2\pi i\left(m,y-\frac{k}{n}\right)\right)dy$$

$2^0$. Korobov $E$, Sobolev $SW$ and Nikolsky-Besov-Amanov $SB$ classes, then

- Kairat Sherniyazov's grids in the form of a linear combination of Korobov's grids

$$\sum_{\substack{\tau\in Z^s:\\ \tau_j>0,\|\tau\|<n}}\frac{1}{detA_{n,\tau}}\sum_{k\in K(n,\tau)}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\sum_{m\in\rho(\tau)}\int_{y\in R_x^{s-1}}exp\left(2\pi i\left(m,y-k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\right)dy$$

- Smolyak-type grids generated by the Method of tensor products of functionals

$$\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\Omega\subset Z_{\nu_0}^s}\frac{1}{2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\int_{y\in R_x^{s-1}}\left\{\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=-2^{\nu_j}-1}^{2^{\nu_j}-1}\left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-sgn\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right]\exp\left(2\pi in_j\left(y_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right)\right\}dy.$$

In the scientific literature on Computed Tomography available to us, such kind of approximations to the desired density $f(x)$ in the form of a finite convolution of values $\left(R^2\right)^{-1}$ - the image of the Radon transform $Rf$ at the grid nodes with a specific kernel subjected to the Radon transform were not found. However, here the substitution of a complex object for a computable one, which is the subject of Computational Mathematics, is absolutely useless until an accuracy acceptable in a particular case is achieved – so $1=100$ with an error $100-1=99$ and, in general $a=b$, with an error $|a-b|$. The required estimates of such restoration errors that arise give the well-known results of research on the Computational (numerical) diameter and new problems of the same content are posed.

Internal strength of main equivalent relationships

$$\sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)}(E_s)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N} f\left(\xi_k\right)\Phi(x-\xi_k)\right\|_{W_2^{\rho(y)}(E_s)} \asymp$$

$$\asymp \sup_{\|f\|_{W_2^{\alpha(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}\le 1}\left\|f(x)-\sum_{k=1}^{N}\left(R^2\right)^{-1}Rf\left(\xi_k\right)R\left(\Phi\left(y-\xi_k\right)\right)(x)\right\|_{W_2^{\rho(y)\cdot\|y\|^{\frac{s-1}{2}}}(S^{s-1}\times R^1)}$$

would remain undisclosed only at the level of potentially expected if not developed theory of the Computational (numerical) diameter in 22 articles out of 28 in the List of References, which made it possible to establish both deeply independent significance and four theorems of an illustrative nature. The remaining six publications are the necessary four coverage of the topic of Computed Tomography, and one more each - illustrative and auxiliary.

## References

1 Temirgaliyev N., Taugynbayeva G.E., Zhubanysheva A.Zh. Plancherel's formula for the Radon transform in the flexible scale of Sobolev Hilbert spaces, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series. 2022. Vol. 141. №4. P. 42-50.

2 Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 226 p.

3 Temirgaliyev N., Abikenova Sh.K., Azhgaliyev Sh.U., Taugynbayeva G.E., Zhubanysheva A.Zh. Theory of Radon Transform in the Concept of Computational (Numerical) Diameter and Methods of the Quasi-Monte Carlo Theory, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series. 2019. Vol. 129. №4. P. 89-135.

4 Temirgaliyev N., Abikenova Sh.K., Azhgaliev Sh.U., Taugynbaeyva G.E. The Radon transform in the scheme C(N)D-inverstigations and the quasi-Monte Carlo theory, Russian Math. (Iz. VUZ). 2020. Vol. 64. №3. P. 87–92.

5 Temirgaliev N., Zhubanysheva A. Order estimates of the norms of derivatives of functions with zero values on linear functionals and their applications, Russian Math. (Iz. VUZ). 2017. Vol. 61. №3. P. 77–82.

6 Quinto E.T. The dependence of the generalized Radon transform on defining measures. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 257, 331-346.

7 Mueller R.K., Kaveh M., Wade G. Reconstructive Tomography and applications to ultrasonic. Proceedings of the IEEE, (1979), 67, 567-587.

8 Sherniyazov K.E. Optimal methods for approximate recovery of functions and solutions of partial differential equations by computational units by linear combinations of Korobov grids with information supercompression and related issues, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series. 2022. Vol. 139. №2. P. 26-76.

9 Sherniyazov K.E. Priblizhennoe vosstanovlenie funkcij i reshenij uravneniya teploprovodnosti s funkciyami raspredeleniya nachal'nyh temperatur iz klassov E, SW i B [Approximate recovery of functions and solutions of the heat equation with distribution functions of initial temperatures from classes E. SW and B]: Dis... cand. physical-mat. sciences. Almaty. 1998.

10 Temirgaliyev N., Nauryzbayev N.Zh., Shomanova A.A. Approximative possibilities of computational aggregates of the "Smolyak type" with Dirichlet, Fejer and Valle?e-Poussin kernels in the scale of Ul'yanov classes, Russian Math. (Iz. VUZ). 2015. Vol. 59. №7. P. 67–72.

11 Temirgaliev N. Tensor Products of Functionals and Their Application, Docklandy Mathematics. 2010. Vol. 81. №1. P. 78-82.

12 Nauchno-issledovatel'skij potencial ITMiNV – eto «Nauchnaya Programma V», ponimanie kotoroj obespechivaetsya «Uchebnaya Programma A», v Sbornike trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj i nauchno-metodicheskoj konferencii «Matematika, Komp'yuternye nauki i Cifrovye tekhnologii v prepodavanii i v nauchnyh issledovaniyah», posvyashchennoj 75-letnemu yubileyu Matematika Nurlana Temirgalieva, Oral, 7-10 dekabrya 2022 goda, str.121-145 [The research potential of ITMiNV is "Scientific Program B", the understanding of which is provided by "Curriculum A", in the Proceedings of the International Scientific and Scientific-Methodological Conference "Mathematics, Computer Science and Digital Technologies in Teaching and Research", dedicated to To the 75th anniversary of Mathematician Nurlan Temirgaliev, Oral, December 7-10, 2022, pp. 121-145].

13 Temirgaliyev N., Zhubanysheva A.Zh. Approximation Theory, Computational Mathematics and Numerical Analysis in new conception of Computational (Numerical) Diameter, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series. 2018. Vol. 124. №3. P. 8–88.

14 Kolyada V.I. On embedding $H^{\omega_1,\dots,\omega_p}$ classes, Math. USSR-Sb. 1986. Vol. 55. №2. P. 351–381.

15 Temirgaliyev N. Komp'juternyj (vychislitel'nyj) poperechnik. Algebraicheskaja teorija chisel i garmonicheskij analiz v zadachah vosstanovlenija (metod Kvazi-Monte Karlo). Teorija vlozhenij i priblizhenij. Rjady

Fur'e[Computational (Numerical) diameter. Algebraic number theory and harmonic analysis in recovery problems (Quasi-Monte Carlo method). The theory of embeddings and approximations. Fourier series. ], Vest. ENU im. L. N. Gumileva. Spec. vypusk, posvjashhennyj nauchnym dostizhenijam matematikov ENU im. L. N. Gumilyova [Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Special issue devoted to the scientific achievements of mathematicians L. N. Gumilev ENU], 1-194 (2010).

16 Temirgaliyev N. Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions, Bulletin of the L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series. 2018. Vol. 125. №4. P. 8-68.

17 AbikenovaSh. K., Temirgaliev N. On the sharp order of informativeness of all possible linear functionals in the discretiztion of solutions of the wave equations, Differential Equation. 2010. Vol. 46. №8. P. 1211-1214.

18 Абикенова Ш. К., Утесов А., Темиргалиев Н. Т. О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщенных классов Соболева // Матем. заметки, 2012, том 91, №3, стр. 459-463.

19 Abikenova Sh. K., Utesov A., Temirgaliev N. On the Discretization of Solutions of the Wave Equation with Initial Conditions from Generalized Sobolev Classes, Mathematical Notes. 2012. Vol. 91. №3. P. 121-125.

20 Temirgaliev N. Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables, Matem. sbornik. 1990. Vol. 69. №2. P. 527-542.

21 . Temirgaliev N. Efficiency of Numerical Integration Algorithms Related to Divisor Theory in Cyclotomic Fields, Mat. notes. 1997. Vol. 61. №2. P. 242-245.

22 Bailov E.A., Zhubanysheva A. Zh., Temirgaliev N. General algorithm for the numerical integration of Periodic function of several variables, Dockland Mathematics, 2007, P. 681-685.

23 Zhubanysheva A. Zh. , Temirgaliev N. , Temirgalieva Zh. N. Application of divisor theory to the construction of tables of optimal coefficients for quadrature formulas, Computational mathematics and mathematical physics. 2009. Vol. 49. №1. P. 12-22.

24 Sikhov M.B., Temirgaliev N. On an algorithm for construction uniformly distribution Korobov grids, Mathematical notes. 2010. Vol. 87. №6. P. 916-917.

25 Bailov E. A., Sikhov M.B., Temirgaliev N. General Algorithm for the Numerical Integration of Functions of Several Variables, Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. №7. P. 1061–1078.

26 Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation, and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter, Russian Mathematics (Iz. VUZ). 2013. Vol. 57. №8. P. 75-80.

27 Natterer F. A Sobolev Space Analysis of Picture Reconstruction, SIAM Journal on Applied Mathematics, 1980. Vol. 39. №. 3. P.402-411.

28 Lions J.L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, Paris, 1968.

**Сведения об авторах:**

*Темиргалиев Нурлан* – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

*Абикенова Шолпан Какимжановна* – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

*Ажгалиев Шапен Орынбасарович* – кандидат физико-математических наук, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

*Нурмолдин Ерик Ерсалынович* – кандидат физико-математических наук, декан Физико-тенического факультета Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

*Таугынбаева Галия Ерболовна* – PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

*Жубанышева Аксауле Жанбыршиевна* – ***Автор для корреспонденции,*** PhD, Старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений, начальник отдела научных изданий Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, Кажымукана, 13, Астана, 010008, Казахстан.

*Temirgaliyev Nurlan* – Prof., Doctor of Phys. -Math. Sciences, Director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Abikenova Sholpan* – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Azhgaliyev Shapen* – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Nurmoldin Yerik* – Cand. of Phys.-Math. Sciences, Dean of the Faculty of Physics and Technical sciences of L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Taugynbayeva Galiya* – PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Zhubanysheva Aksaule* – ***Corresponding author,*** PhD, Senior Researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations, Head of the Department of Scientific Publications ot L. N. Gumilyov Eurasian National University, Kazhymukana str., 13, Astana, 010008, Kazakhstan.

*Поступила в редакцию 17.01.2023*