Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2023, Vol. 142, №1, P.6-20
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.25.19**

И.Э. Симонова, Б.В. Симонов

Волгоградский государственный технический университет, пр. Ленина, 28, г. Волгоград, 400005, Россия
(E-mail: simonova-vstu@mail.ru, simonov-b2002@yandex.ru)

Соотношения между частными модулями гладкости функций с монотонными коэффициентами Фурье

Аннотация: Проблема оценивания модулей гладкости функций из L_q в терминах модулей гладкости из более широкого Лебеговского класса L_p известна давно. На начальном этапе в работах Титчмарша, Харди, Литтлвуда, Никольского изучались свойства функций из классов Липшица и были получены соотвествующие вложения. Для модулей непрерывности функций одной переменной П.Л. Ульянов доказал неравенство, позже названное его именем – "неравенство Ульянова". Классическое вложение Харди-Литтлвуда для пространств Липшица является следствием из неравенства Ульянова. Как показал В.А. Андриенко, неравенство Ульянова является точным в шкале классов H_p^ω. Дальнейшее развитие этого направления связано с работами В.А. Андриенко, Э.А. Стороженко, М.К. Потапова, Л. Лейндлера, В.И. Коляды, П. Освальда, Н. Темиргалиева, С.В. Лапина и других математиков.

В.И. Коляда доказал, что неравенство Ульянова может быть усилено, и доказал соответствующее "неравенство Коляды". Неравенство Коляды точно в том смысле, что существует функция в L_p с любым заданным порядком модуля непрерывности, для которой эту оценку нельзя улучшить ни при каком значении δ. Ю.В. Нетрусов, М.Л. Гольдман, У. Требель распространили неравенство Коляды на модули гладкости высших порядков. Другим направлением исследований стало изучение дробных модулей гладкости в работах М.К. Потапова, Б.В. Симонова, С.Ю. Тихонова. Это позволило усилить неравенство Ульянова и проявило специфику и особую значимость использования дробных модулей гладкости, без которых, как оказалось, невозможно получить окончательные результаты.

В настоящей статье изучаются частные модули гладкости функций двух переменных. Получены неравенства, распространяющие неравенство Коляды на частные модули гладкости для функций с монотонными коэффициентами Фурье. Получены также оценки частных модулей гладкости производной функции с монотонными коэффициентами Фурье через частные модули гладкости исходной функции.

Ключевые слова: метрика, частный модуль гладкости, монотонные коэффициенты Фурье.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2023/1.1

2000 Mathematics Subject Classification: 41A17, 42A10, 42A32

Введение. Постановка задачи. Общие соотношения между модулями непрерывности в разных метриках были получены в работах П.Л. Ульянова [1,2]:

при $1 < p < q < \infty, \delta \in (0,1)$

$$\omega_1(f,\delta)_q \ll \left(\int\limits_0^{\delta} \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_1(f,t)_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Обобщения этого неравенства называются неравенствами типа Ульянова. Дальнейшее развитие этого направления связано с работами многих математиков (см., например, [3-5]). Неравенство типа Ульянова для смешанных модулей гладкости установлено в работе [6]. Неравенство типа Ульянова для полных модулей гладкости получены в [7 - 9].

Неравенство Ульянова было усилено В.И. Колядой [10]:

при $1 < p < q < \infty$, $\delta \in (0,1)$

$$\delta^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\delta}^{1} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} \omega_1(f,t)_q \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\int\limits_0^{\delta} \left(t^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \omega_1(f,t)_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Неравенство Коляды для полных модулей гладкости рассмотрено, например, в [10 - 13]. В работе [14] получено неравенство, устанавливающее связь между частными модулями гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье. В настоящей работе изучается взаимосвязь между частными модулями гладкости для функций с монотонными коэффициентами Фурье. Частные модули гладкости и их свойства изучались ранее в ряде работ (см., например, [15], гл. X, XI).

Введем следующие обозначения:

$L_{p_1p_2}, 1 \le p_i \le \infty, i=1,2-$ множество измеримых функций двух переменных $f(x_1,x_2)$, 2π-периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_{p_1p_2} = ||\{||f||_{p_1}\}||_{p_2} < \infty$, где $\|f\|_{p_i} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f|^{p_i} dx_i \right)^{\frac{1}{p_i}}$, если $1 \le p_i < \infty$, $\|f\|_{p_i} = \underset{0 \le x_i \le 2\pi}{supvrai} |f|$, если $p_i = \infty$;

$L^0_{p_1p_2}$ — множество функций $f \in L_{p_1p_2}$ таких, что $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0$ для почти всех x_2 и $\int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ для почти всех x_1;

$S_{m_1,\infty}(f), S_{\infty,m_2}(f), S_{m_1,m_2}(f)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x_1,x_2)$, т.е. $S_{m_1,\infty}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2) D_{m_1}(t_1)dt_1$, $S_{\infty,m_2}(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x_1,x_2+t_2) D_{m_2}(t_2)dt_2$,

$S_{m_1,m_2}(f) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x_1+t_1,x_2+t_2) D_{m_1}(t_1) D_{m_2}(t_2) dt_1 dt_2$ $(m_i = 0,1,2,...,\ i=1,2)$,

где $D_m(t) = \frac{\sin{(m+\frac{1}{2})t}}{2\sin{\frac{t}{2}}}$, $m = 0,1,2...$;

$f^{(\rho_1,\rho_2)}$ — производная в смысле Вейля функции $f(x_1,x_2)$ порядка ρ_1 $(\rho_1 \ge 0)$ по переменной x_1 и порядка ρ_2 $(\rho_2 \ge 0)$ по переменной x_2 ([16], гл. III, стр. 238).

Для функции $f \in L_{p_1p_2}$ определим разности положительных порядков α_1 и α_2 с шагами h_1 и h_2, соответственно, по переменным x_1 и x_2 следующим образом: $\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f) = \sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1+(\alpha_1-\nu_1)h_1, x_2)$, $\Delta^{\alpha_2}_{h_2}(f) = \sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2+(\alpha_2-\nu_2)h_2)$, где $\binom{\alpha}{\nu} = 1$ для $\nu = 0$, $\binom{\alpha}{\nu} = \alpha$ для $\nu = 1$, $\binom{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)}{\nu!}$ для $\nu \ge 2$.

Далее, обозначим через

$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}-$ частный модуль гладкости положительного порядка α_1 по переменной x_1 , т.е.

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} = \sup_{|h_1| \le \delta_1} \|\Delta^{\alpha_1}_{h_1}(f)\|_{p_1p_2};$$

$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}-$ частный модуль гладкости положительного порядка α_2 по переменной x_2 , т.е.

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}=\sup_{|h_2|\le\delta_2}\|\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)\|_{p_1p_2}.$$

Пусть дана последовательность чисел $\{a_{n_1n_2}\}=\{a_{n_1n_2}\}_{n_i=1}^{\infty}$.

Введем разности

$$\Delta_{10}a_{n_1n_2}=a_{n_1n_2}-a_{n_1+1n_2},\ \Delta_{01}a_{n_1n_2}=a_{n_1n_2}-a_{n_1n_2+1},$$

$$\Delta_{11}a_{n_1n_2}=\Delta_{10}(\Delta_{01}a_{n_1n_2})=a_{n_1n_2}-a_{n_1+1n_2}-a_{n_1n_2+1}+a_{n_1+1n_2+1}.$$

Будем писать, что $\{a_{n_1n_2}\}\in M$, если числа $a_{n_1n_2}$ удовлетворяют условиям:

$$a_{n_1n_2}\ \to 0 \text{ при } n_1\to\infty \text{ и любом фиксированном } n_2,$$

$$a_{n_1n_2}\ \to 0 \text{ при } n_2\to\infty \text{ и любом фиксированном } n_1 \qquad (1)$$

$$\text{и} \quad \Delta_{11}a_{n_1n_2}\ge 0. \qquad (2)$$

Отметим, что из справедливости условий (1) и (2) следует, что

$\Delta_{10}a_{n_1n_2}\ge 0$ и $\Delta_{01}a_{n_1n_2}\ge 0$, $a_{n_1m_1}\ge a_{n_2m_1}$ для $n_1\le n_2$ и $a_{n_1m_1}\ge a_{n_1m_2}$ для $m_1\le m_2$, $a_{n_1n_2}\ge 0$ для всех $n_i\in\mathbb{N}, i=1,2$.

Скажем, что $f\in M_{p_1p_2}$, если

1) $f\in L^0_{p_1p_2}$, где $1<p_i<\infty$ $(i=1,2)$,

2) функция $f(x_1,x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sigma(f)\equiv\sum_{n_2=1}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}a_{n_1n_2}\psi_1(n_1x_1)\psi_2(n_2x_2),$$

где $\psi_i(t)$ есть $\cos t$ или $\sin t$,

3) коэффициенты $a_{n_1n_2}$ удовлетворяют условиям (1) и (2), то есть $\{a_{n_1,n_2}\}\in M$.

Заметим, что если $f\in L^0_{p_1p_2}$, то условие (1) выполняется.

Для неотрицательных функционалов $F(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)$ будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\ll G(f,\delta_1,\delta_2)$, если существует положительная постоянная C, не зависящая от f,δ_1 и δ_2, и такая, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\le CG(f,\delta_1,\delta_2)$. Если одновременно $F(f,\delta_1,\delta_2)\ll G(f,\delta_1,\delta_2)$ и $G(f,\delta_1,\delta_2)\ll F(f,\delta_1,\delta_2)$, то будем писать, что $F(f,\delta_1,\delta_2)\asymp G(f,\delta_1,\delta_2)$.

Основной результат.

Теорема. Пусть $f\in M_{pp}, 1<p<q<\infty$, $\theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\alpha_i>\theta,\delta_i\in(0,\frac{1}{2})$, $i=1,2$. Тогда

$$\text{I.}\quad C_1\delta_1^{\alpha_1-\theta}\left(\int_{\delta_1}^{1}t_1^{-p(\alpha_1-\theta)}\omega^p_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{qp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_{0}^{\delta_1}t_1^{-q\theta}\omega^q_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{pp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le C_2\delta_1^{\alpha_1-\theta}\left(\int_{\delta_1}^{1}t_1^{-p(\alpha_1-\theta)}\omega^p_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{qp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\text{II.}\quad C_3\delta_2^{\alpha_2-\theta}\left(\int_{\delta_2}^{1}t_2^{-p(\alpha_2-\theta)}\omega^p_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{pq}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\int_{0}^{\delta_2}t_2^{-q\theta}\omega^q_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{pp}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le C_4\delta_2^{\alpha_2-\theta}\left(\int_{\delta_2}^{1}t_2^{-p(\alpha_2-\theta)}\omega^p_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{pq}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где положительные постоянные C_1,C_2,C_3,C_4 зависят лишь от p,q и $\alpha_i,i=1,2$.

Аналогичная теорема для функции одного переменного доказана в работе [17].

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (см. [18]). Пусть $f\in L^0_{p_1p_2}$, $g\in L^0_{p_1p_2}$, $1\le p_i\le\infty,\beta_i>\alpha_i>0,r_i>0$, $i=1,2$. Тогда

1) $\omega_{\alpha_1,0}(f,0)_{p_1p_2}=0$, $\omega_{0,\alpha_2}(f,0)_{p_1p_2}=0$,

2) $\omega_{\alpha_1,0}(f+g,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} + \omega_{\alpha_1,0}(g,\delta_1)_{p_1p_2}$,
$\omega_{0,\alpha_2}(f+g,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} + \omega_{0,\alpha_2}(g,\delta_2)_{p_1p_2}$,
3) $\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}$, если $0 \le \delta_1 \le t_1$,
$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1p_2}$, если $0 \le \delta_2 \le t_2$,
4) $\frac{\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}}{\delta_1^{\alpha_1}} \ll \frac{\omega_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}}{t_1^{\alpha_1}}$, если $0 < t_1 \le \delta_1 < \pi$,
$\frac{\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}}{\delta_2^{\alpha_2}} \ll \frac{\omega_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{p_1p_2}}{t_2^{\alpha_2}}$, если $0 < t_2 \le \delta_2 < \pi$,
5) $\omega_{\beta_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2}$, $\omega_{0,\beta_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2}$,
6) $\delta_1^{-r_1}\omega_{\alpha_1+r_1,0}(f,\delta_1)_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}(f^{(r_1,0)},\delta_1)_{p_1p_2} \ll$
$\ll \int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-r_1}\omega_{\alpha_1+r_1,0}(f,t_1)_{p_1p_2}\frac{dt_1}{t_1}$, если $0 < \delta_1 < \pi$ и $f^{(r_1,0)} \in L^0_{p_1p_2}$,
$\delta_2^{-r_2}\omega_{0,\alpha_2+r_2}(f,\delta_2)_{p_1p_2} \ll \omega_{0,\alpha_2}(f^{(0,r_2)},\delta_2)_{p_1p_2} \ll$
$\ll \int\limits_0^{\delta_2} t_2^{-r_2}\omega_{0,\alpha_2+r_2}(f,t_2)_{p_1p_2}\frac{dt_2}{t_2}$, если $0 < \delta_2 < \pi$ и $f^{(0,r_2)} \in L^0_{p_1p_2}$.

Лемма 2 (см. [14]). Пусть $f \in L^0_{p_1p_2}, 1 < p_i < \infty, \alpha_i > 0, n_i \in \mathbb{N}, i = 1,2.$ Тогда

$$\text{а) } \omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - S_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_1^{-\alpha_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f)\big\|_{p_1p_2},$$

$$\text{б) } \omega_{0,\alpha_2}\Big(f,\frac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2} \asymp \big\|f - S_{\infty,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2} + n_2^{-\alpha_2}\big\|S^{(0,\alpha_2)}_{\infty,n_2}(f)\big\|_{p_1p_2}.$$

Лемма 3 (см. [19]). Пусть $f \in M_{p_1p_2}, 1 < p_i < q_i < \infty, r_i \ge 0, i = 1,2.$ Тогда

$$C_1\|f^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} \le \Big\{\sum_{n_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty}(a_{n_1,n_2}n_1^{r_1}n_2^{r_2})^{p_1}n_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}n_2^{p_2-2}\Big\}^{\frac{1}{p_2}} \le C_2\|f^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят лишь от r_i, p_i и $q_i, i = 1,2.$

Лемма 4. Пусть $f \in M_{p_1p_2}, f^{(r_1,r_2)} \in L_{p_1p_2}, 1 < p_i < \infty, r_i \ge 0, \alpha_i > 0, n_i \in \mathbb{N}, i = 1,2$. Тогда

$$(а)\ \omega_{\alpha_1,0}\Big(f^{(r_1,r_2)},\tfrac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2} \asymp \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\left(\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=1}^{n_1}a^{p_1}_{k_1k_2}k_1^{r_1p_1}k_1^{(\alpha_1+1)p_1-2}\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}k_2^{r_2p_2}k_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$
$$+\left(\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty}a^{p_1}_{k_1k_2}k_1^{r_1p_1}k_1^{p_1-2}\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}k_2^{r_2p_2}k_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

$$(б)\ \omega_{0,\alpha_2}\Big(f^{(r_1,r_2)},\tfrac{1}{n_2}\Big)_{p_1p_2} \asymp \frac{1}{n_2^{\alpha_2}}\left\{\sum_{k_2=1}^{n_2}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}a^{p_1}_{k_1k_2}k_1^{r_1p_1}k_1^{p_1-2}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}k_2^{r_2p_2}k_2^{(\alpha_2+1)p_2-2}\right\}^{\frac{1}{p_2}} +$$
$$+\left\{\sum_{k_2=n_2+1}^{\infty}\left(\sum_{k_1=1}^{\infty}a^{p_1}_{k_1k_2}k_1^{r_1p_1}k_1^{p_1-2}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}k_2^{r_2p_2}k_2^{p_2-2}\right\}^{\frac{1}{p_2}}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (а). Применяя лемму 2, имеем:

$$\omega_{\alpha_1,0}\Big(f^{(r_1,r_2)},\tfrac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2} \asymp n_1^{-\alpha_1}\big\|S^{(\alpha_1,0)}_{n_1,\infty}(f^{(r_1,r_2)})\big\|_{p_1p_2} + \big\|f^{(r_1,r_2)} - S_{n_1,\infty}(f^{(r_1,r_2)})\big\|_{p_1p_2} = J_1 + J_2.$$

Оценим сначала J_1. Применяя лемму 3, получим справедливость неравенств

$$J_1 \le C_1\frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\left(\sum_{k_2=1}^{\infty}\left\{\sum_{k_1=1}^{n_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^{p_1}k_1^{(\alpha_1+1)p_1-2}\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}k_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \le C_2J_1,$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят лишь от α_1, r_1, r_2, p_1 и p_2.

Теперь оценим $J_2 = \big\|f^{(r_1,r_2)} - S_{n_1,\infty}(f^{(r_1,r_2)})\big\|_{p_1p_2}$. Рассмотрим функции $\varphi(x_1,x_2), \varphi_1(x_1,x_2)$, имеющие, соответственно, ряды Фурье

$$\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\sum_{\nu_1=1}^{\infty}b_{\nu_1,\nu_2}\cos\nu_1x_1\cos\nu_2x_2, \qquad \sum_{\nu_2=1}^{\infty}\sum_{\nu_1=1}^{n_1}b_{\nu_1,\nu_2}\cos\nu_1x_1\cos\nu_2x_2,$$

где

$$b_{\nu_1,\nu_2} = \begin{cases} a_{\nu_1,\nu_2}, & \text{если } \nu_1 \ge n_1+1,\ \nu_2 \ge 1,\\ a_{n_1+1,\nu_2}, & \text{если } 1 \le \nu_1 \le n_1, \nu_2 \ge 1.\end{cases}$$

Обозначим $\varphi_2 = f - S_{n_1,\infty}(f)$. Тогда $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Функции φ и φ_1 удовлетворяют условиям леммы 3. Поэтому

$$J_2 = \|\varphi_2^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} \ll \|\varphi^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} + \|\varphi_1^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} \ll \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{\infty}(b_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+\left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n_1}(b_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}(a_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+\left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(a_{n_1\nu_2}^{p_1}\nu_2^{r_2p_1}n_1^{(r_1+1)p_1-1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}(a_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} +$$

$$+\frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n_1}(a_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Объединяя оценки для J_1 и J_2, получаем, что оценка сверху в утверждении (а) верна.

Теперь докажем справедливость оценки снизу. Так как

$$J_3 = \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}(a_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{\infty}(b_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

и функция φ удовлетворяет условиям леммы 3, то

$$J_3 \ll \|\varphi^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} \ll \|\varphi_1^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} + \|\varphi_2^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} = \|\varphi_1^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} + \|f^{(r_1,r_2)} - S_{n_1,\infty}(f^{(r_1,r_2)})\|_{p_1p_2}.$$

Так как функция φ_1 удовлетворяет условиям леммы 3, то

$$\|\varphi_1^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} \ll \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n_1}(b_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(a_{n_1\nu_2}^{p_1}\nu_2^{r_2p_1}n_1^{(r_1+1)p_1-1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{\nu_1=1}^{n_1}(a_{\nu_1\nu_2}\nu_1^{r_1}\nu_2^{r_2})^{p_1}\nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2}\Big)^{\frac{p_2}{p_1}}\nu_2^{p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Применяя к последней сумме лемму 3, получаем

$$\|\varphi_1^{(r_1,r_2)}\|_{p_1p_2} \ll \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f^{(r_1,r_2)})\|_{p_1p_2}.$$

Таким образом, с учетом леммы 2 имеем:

$$J_3 \ll \frac{1}{n_1^{\alpha_1}}\|S_{n_1,\infty}^{(\alpha_1,0)}(f^{(r_1,r_2)})\|_{p_1p_2} + \|f^{(r_1,r_2)} - S_{n_1,\infty}(f^{(r_1,r_2)})\|_{p_1p_2} \ll \omega_{\alpha_1,0}\Big(f^{(r_1,r_2)},\frac{1}{n_1}\Big)_{p_1p_2}.$$

Объединяя это неравенство и оценку для J_1, получаем, что оценка снизу в утверждении (а) верна.

Доказательство утверждения (б) леммы 4 проводится аналогично доказательству утверждения (а).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5 (см. [20]). Пусть $a \geq 0, b \geq 0, \alpha > 0$. Тогда

$$C_1(a^\alpha + b^\alpha) \leq (a+b)^\alpha \leq C_2(a^\alpha + b^\alpha),$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 зависят лишь от α.

Лемма 6 (см. [21]). Пусть последовательность чисел $\{b_n\}$ такова, что $b_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 b_n = b_n - b_{n+1} \geq 0$ для любого натурального n; пусть числа α, λ и p таковы, что $\alpha < -1, \lambda \in (-\infty, +\infty), p \in (0,\infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\Big(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \nu^\lambda\Big)^p \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha (b_n n^{\lambda+1})^p,$$

где постоянная C зависит лишь от α, λ и p.

Лемма 7 (см. [19]). Пусть последовательность чисел $\{b_n\}$ такова, что $b_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_1 b_n = b_n - b_{n+1} \geq 0$ для любого натурального n; пусть числа α, λ и p таковы, что $\alpha > -1, \lambda \in (-\infty, +\infty), p \in (0, \infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\Big(\sum_{\nu=n}^{\infty} b_{\nu}\nu^{\lambda}\Big)^p \leq C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}(b_n n^{\lambda+1})^p,$$

где постоянная C зависит лишь от α, λ и p.

Лемма 8. Пусть $f \in M_{qp}, f^{(r_1,r_2)} \in L_{qp}, 1 < p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_1 > \theta, n_1 \in \mathbb{N}$, $r_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$. Тогда

(а) $D1(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{n_1+1}) = \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum\limits_{m_1=1}^{n_1} m_1^{p(\alpha_1-\theta)}\frac{1}{m_1}\omega^p_{\alpha_1,0}(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{m_1})_{qp}\Big)^{\frac{1}{p}} \asymp$

$\asymp \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum\limits_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p-2}\sum\limits_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}} +$

$+\Big(\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum\limits_{k_1=n_1+1}^{\infty}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Big)^{\frac{1}{p}} = D1_1 + D1_2,$

(б) $C1(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{n_1+1}) = \Big(\sum\limits_{\nu_1=n_1+1}^{\infty}\nu_1^{q\theta}\omega^q_{\alpha_1,0}(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{\nu_1})_{pp}\frac{1}{\nu_1}\Big)^{\frac{1}{q}} \asymp$

$\asymp \frac{1}{n_1^{\alpha_1-\theta}}\Big\{\sum\limits_{k_1=1}^{n_1}\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^p k_1^{(\alpha_1+1)p-2}k_2^{p-2}\Big\}^{\frac{1}{p}} +$

$+\Big(\sum\limits_{m_1=n_1+1}^{\infty} m_1^{q-2}\Big\{\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p k_2^{p-2}\Big\}^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}} = C1_1 + C1_2.$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (а).

Применяя лемму 4, получим

$D1(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{n_1+1}) \asymp$

$\asymp \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum\limits_{m_1=1}^{n_1} m_1^{p(\alpha_1-\theta)}\frac{1}{m_1}\Bigg\{\frac{1}{m_1^{\alpha_1}}\Bigg(\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{(\alpha_1+1)q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Bigg)^{\frac{1}{p}} +$

$+\Bigg(\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum\limits_{k_1=m_1+1}^{\infty}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\Bigg\}^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$

Применяя лемму 5, имеем:

$D1(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{n_1+1}) \asymp \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum\limits_{m_1=1}^{n_1} m_1^{-p\theta-1}\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{(\alpha_1+1)q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Big)^{\frac{1}{p}} +$

$+\frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum\limits_{m_1=1}^{n_1} m_1^{p(\alpha_1-\theta)-1}\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum\limits_{k_1=m_1+1}^{n_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Big)^{\frac{1}{p}} +$

$+\Big(\sum\limits_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum\limits_{k_1=n_1+1}^{\infty}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Big)^{\frac{1}{p}} = D_1 + D_2 + D_3.$

Оценим $D_1 = \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum\limits_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p-2}\Big\langle\sum\limits_{m_1=1}^{n_1} m_1^{-p\theta-1}\Big\{\sum\limits_{k_1=1}^{m_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{(\alpha_1+1)q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}}\Big\rangle\Big)^{\frac{1}{p}}.$

Оценим выражение в угловых скобках.

Введем обозначения:

$\alpha = -p\theta - 1 < -1, r = \frac{p}{q} \in (0, \infty), \lambda = ((\alpha_1+1)q - 2) \in (-\infty, +\infty),$

$b_n = (a_{nk_2}n^{r_1}k_2^{r_2})^q$, если $n \leq n_1$,

$b_n = 0$, если $n > n_1$.

Применяя лемму 6, проведем преобразования:

$$\sum_{m_1=1}^{n_1} m_1^{-p\theta-1}\left\{\sum_{k_1=1}^{m_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{(\alpha_1+1)q-2}\right\}^{\frac{p}{q}} \leq \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{\alpha}\left\{\sum_{k_1=1}^{m_1}k_1^{\lambda}b_{k_1}\right\}^{\frac{p}{q}} \ll$$

$$\ll \sum_{m_1=1}^{\infty} m_1^{\alpha}\left\{m_1^{\lambda+1}b_{m_1}\right\}^{\frac{p}{q}} = \sum_{m_1=1}^{n_1} m_1^{-p\theta-1}\left\{(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^q m_1^{(\alpha_1+1)q-1}\right\}^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{n_1} m_1^{-1+\frac{p}{q}-1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-\frac{p}{q}} = \sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{m_1=1}^{n_1} m_1^{-p\theta-1}\left\{\sum_{k_1=1}^{m_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{(\alpha_1+1)q-2}\right\}^{\frac{p}{q}} \geq \sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}k_2^{r_2})^p m_1^{-p\theta-1}\left\{\sum_{k_1=1}^{m_1}k_1^{(r_1+\alpha_1+1)q-2}\right\}^{\frac{p}{q}} \gg$$

$$\gg \sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}k_2^{r_2})^p m_1^{-p\theta-1}\left\{m_1^{(r_1+\alpha_1+1)q-1}\right\}^{\frac{p}{q}} = \sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$D_1 \asymp \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p-2}\sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь оценим сверху

$$D_2 = \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Bigg(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p-2}\Bigg\langle\sum_{m_1=1}^{n_1}m_1^{p(\alpha_1-\theta)-1}\left\{\sum_{k_1=m_1+1}^{n_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{q-2}\right\}^{\frac{p}{q}}\Bigg\rangle\Bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим выражение в угловых скобках.
Введем обозначения:
$\alpha = p(\alpha_1-\theta)-1 > -1, r = \frac{p}{q} \in (0,\infty), \lambda = (q-2) \in (-\infty,+\infty)$,
$b_n = (a_{nk_2}n^{r_1}k_2^{r_2})^q$, если $n \leq n_1$,
$b_n = 0$, если $n > n_1$.
Тогда, применяя лемму 7, получим, что

$$\sum_{m_1=1}^{n_1}m_1^{p(\alpha_1-\theta)-1}\left\{\sum_{k_1=m_1+1}^{n_1}(a_{k_1k_2}k_1^{r_1}k_2^{r_2})^q k_1^{q-2}\right\}^{\frac{p}{q}} \leq$$

$$\leq \sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\alpha}\left\{\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}k_1^{\lambda}b_{k_1}\right\}^{\frac{p}{q}} \ll \sum_{m_1=1}^{\infty}m_1^{\alpha}\left\{m_1^{\lambda+1}b_{m_1}\right\}^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{n_1}m_1^{p(\alpha_1-\theta)-1}\left\{(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^q m_1^{q-1}\right\}^{\frac{p}{q}} = \sum_{m_1=1}^{n_1}m_1^{p\alpha_1-1+\frac{p}{q}-1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{p-\frac{p}{q}} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$D_2 \ll \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}}\Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}k_2^{p-2}\sum_{m_1=1}^{n_1}(a_{m_1k_2}m_1^{r_1}k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Из полученных оценок для D_1 и D_2 следует

$$D_1 + D_2 \asymp \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}} \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p-2} \sum_{m_1=1}^{n_1} (a_{m_1k_2} m_1^{r_1} k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, мы показали, что

$$D1 \asymp \frac{1}{(n_1+1)^{\alpha_1-\theta}} \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p-2} \sum_{m_1=1}^{n_1} (a_{m_1k_2} m_1^{r_1} k_2^{r_2})^p m_1^{(\alpha_1+1)p-2} \Big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} (a_{k_1k_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2})^q k_1^{q-2} \Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство утверждения (б) леммы 8 проводится аналогично доказательству утверждения (а).

Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Пусть $f \in M_{pq}, f^{(r_1,r_2)} \in L_{pq}, 1 < p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_2 > \theta, n_2 \in \mathbb{N}$, $r_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$. Тогда

(а) $D2(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{n_2+1}) = \frac{1}{(n_2+1)^{\alpha_2-\theta}} \Big(\sum\limits_{m_2=1}^{n_2} m_2^{p(\alpha_2-\theta)} \frac{1}{m_2} \omega_{0,\alpha_2}^p (f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{m_2})_{pq} \Big)^{\frac{1}{p}} \asymp$

$$\asymp \frac{1}{n_2^{\alpha_2-\theta}} \Big\{ \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_1=1}^{\infty} (a_{k_1k_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2})^p k_2^{(\alpha_2+1)p-2} k_1^{p-2} \Big\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big\{ \sum_{k_2=n_2+1}^{\infty} \Big(\sum_{k_1=1}^{\infty} (a_{k_1k_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2})^p k_1^{p-2} \Big)^{\frac{q}{p}} k_2^{q-2} \Big\}^{\frac{1}{q}} = D2_1 + D2_2,$$

(б) $C2(f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{n_2+1}) = \Big(\sum\limits_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \nu_2^{q\theta} \omega_{0,\alpha_2}^q (f^{(r_1,r_2)}, \frac{1}{\nu_2})_{pp} \frac{1}{\nu_2} \Big)^{\frac{1}{q}} \asymp$

$$\asymp \frac{1}{n_2^{\alpha_2-\theta}} \Big\{ \sum_{k_2=1}^{n_2} \sum_{k_1=1}^{\infty} (a_{k_1k_2} k_1^{r_1} k_2^{r_2})^p k_2^{(\alpha_2+1)p-2} k_1^{p-2} \Big\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \Big(\sum_{m_2=n_2+1}^{\infty} m_2^{q-2} \Big\{ \sum_{k_1=1}^{\infty} (a_{k_1m_2} k_1^{r_1} m_2^{r_2})^p k_1^{p-2} \Big\}^{\frac{q}{p}} \Big)^{\frac{1}{q}} = C2_1 + C2_2.$$

Доказательство леммы 9 проводится аналогично доказательству леммы 8.

Лемма 10 (неравенство Минковского, [16, стр. 22]). Пусть $1 \leq p < \infty, M \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Big(\sum_{i=1}^{N} \Big| \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \Big|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{j=1}^{M} \Big(\sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 11 (см. [22]). а). Пусть функция $T_{2^{n_1},\infty} \in L_{p_1p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$ $(i = 1, 2)$ и является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_1} по переменной x_1, $1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty$, $q_1^* = q_1$, если $q_1 < \infty$, и $q_1^* = 1$, если $q_1 = \infty, N_1 \leq N_2, N_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$. Тогда

$$\| \sum_{n_1=N_1}^{N_2} T_{2^{n_1},\infty} \|_{q_1p_2} \leq C \left(\sum_{n_1=N_1}^{N_2} 2^{n_1 q_1^* (\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1})} \| T_{2^{n_1},\infty} \|_{p_1p_2}^{q_1^*} \right)^{1/q_1^*},$$

где постоянная C не зависит от N_1, N_2 и $T_{2^{n_1},\infty}, n_1 \in [N_1, N_2]$.

б). Пусть функция $T_{\infty,2^{n_2}} \in L_{p_1p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty$ $(i = 1, 2)$ и является тригонометрическим полиномом порядка 2^{n_2} по переменной x_2, $1 \leq p_2 < q_2 \leq \infty$, $q_2^* = q_2$, если $q_2 < \infty$, и $q_2^* = 1$, если $q_2 = \infty, M_1 \leq M_2, M_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$. Тогда

$$\|\sum_{n_2=M_1}^{M_2} T_{\infty,2^{n_2}}\|_{p_1q_2} \leq C\left(\sum_{n_2=M_1}^{M_2} 2^{n_2q_2^*(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2})}\|T_{\infty,2^{n_2}}\|_{p_1p_2}^{q_2^*}\right)^{1/q_2^*},$$

где постоянная C не зависит от M_1, M_2 и $T_{\infty,2^{n_2}}, n_2 \in [M_1, M_2]$.

Лемма 12. Пусть $f \in L^0_{p_1p_2}, 1 < p_i < \infty, n_i = 0,1,2,..., i = 1,2.$ Тогда

$\|f - S_{2^{n_1},\infty}(f)\|_{p_1p_2} \ll \|\sum\limits_{\nu_1=n_1}^{\infty}(S_{2^{\nu_1},\infty}(f) - S_{2^{\nu_1+1},\infty}(f))\|_{p_1p_2},$

$\|f - S_{\infty,2^{n_2}}(f)\|_{p_1p_2} \ll \|\sum\limits_{\nu_2=n_2}^{\infty}(S_{\infty,2^{\nu_2}}(f) - S_{\infty,2^{\nu_2+1}}(f))\|_{p_1p_2}.$

Доказательство леммы 12 аналогично доказательству леммы 3 из [23].

Лемма 13(см. [15]). Пусть $1 \leq p < \infty$, $a_k \geq 0, b_k \geq 0, \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \gamma_n a_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\sum_{n=k}^{\infty} b_n\Big)^p \ll \sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k\gamma_k)^p.$$

Лемма 14. Пусть $f \in L^0_{p_1p_2}$, $1 \leq p_i \leq \infty, \alpha_i > 0, \rho_i > 0, \delta_i \in (0,1)(i = 1,2), q \geq 1, \beta > 0.$ Тогда

$$\int_0^{\delta_1}(t_1^{-\beta}\omega_{\alpha_1,0}(f^{(\rho_1,0)}, t_1)_{p_1p_2})^q\frac{dt_1}{t_1} \asymp \int_0^{\delta_1}(t_1^{-(\beta+\rho_1)}\omega_{\alpha_1+\rho_1,0}(f, t_1)_{p_1p_2})^q\frac{dt_1}{t_1}, \tag{3}$$

$$\int_0^{\delta_2}(t_2^{-\beta}\omega_{0,\alpha_2}(f^{(0,\rho_2)}, t_2)_{p_1p_2})^q\frac{dt_2}{t_2} \asymp \int_0^{\delta_2}(t_2^{-(\beta+\rho_1)}\omega_{0,\alpha_2+\rho_2}(f, t_2)_{p_1p_2})^q\frac{dt_2}{t_2}. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем сначала соотношение (3). Для каждого $\delta_1 \in (0,1)$ существует целое неотрицательное число n_1 такое, что $\frac{1}{2^{n_1+1}} \leq \delta_1 < \frac{1}{2^{n_1}}$. Тогда, применяя свойства частного модуля гладкости, имеем:

$\int\limits_0^{\delta_1}(t_1^{-\beta}\omega_{\alpha_1,0}(f^{(\rho_1,0)}, t_1)_{p_1p_2})^q\frac{dt_1}{t_1} \asymp \sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1\beta q}\omega^q_{\alpha_1,0}(f^{(\rho_1,0)}, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2}.$

Применяя леммы 1 (пункт 6) и 13, получим

$\sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1\beta q}\omega^q_{\alpha_1,0}(f^{(\rho_1,0)}, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2} \ll \sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1\beta q}\Big(\sum\limits_{\nu_1=m_1}^{\infty} 2^{\nu_1\rho_1}\omega_{\alpha_1+\rho_1,0}(f, \frac{1}{2^{\nu_1}})_{p_1p_2}\Big)^q \ll$

$\ll \sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1(\beta+\rho_1)q}\omega^q_{\alpha_1+\rho_1,0}(f, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2}.$

С другой стороны, вновь применяя лемму 1 (пункт 6), имеем оценку

$\sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1\beta q}\omega^q_{\alpha_1,0}(f^{(\rho_1,0)}, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2} \gg \sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1(\beta+\rho_1)q}\omega^q_{\alpha_1+\rho_1,0}(f, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2}.$

Таким образом, мы показали, что

$\sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1\beta q}\omega^q_{\alpha_1,0}(f^{(\rho_1,0)}, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2} \asymp \sum\limits_{m_1=n_1}^{\infty} 2^{m_1(\beta+\rho_1)q}\omega^q_{\alpha_1+\rho_1,0}(f, \frac{1}{2^{m_1}})_{p_1p_2}.$

Отсюда, используя свойства частного модуля гладкости, получаем (3). Соотношение (4) доказывается аналогично.

Лемма 14 доказана.

Доказательство теоремы.

I. Покажем сначала, что

$$C1(f,\delta_1) = \left(\int_0^{\delta_1} t_1^{-q\theta}\omega^q_{\alpha_1,0}(f, t_1)_{pp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q}} \ll \delta_1^{\alpha_1-\theta}\left(\int_{\delta_1}^{1} t_1^{-p(\alpha_1-\theta)}\omega^p_{\alpha_1,0}(f, t_1)_{qp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$D1(f,\delta_1)$.

Для каждого $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2})$ существует натуральное число n_1 такое, что $\frac{1}{n_1+2} \leq \delta_1 < \frac{1}{n_1+1}$. Тогда

$$C1(f,\delta_1) \le C1(f,\frac{1}{n_1+1}).$$

Применяя лемму 8, имеем оценку

$$C1(f,\delta_1) \le C1(f,\frac{1}{n_1+1}) \ll C1_1 + C1_2.$$

Оценим сверху $C1_i (i=1,2)$. Из леммы 8 следует, что $C1_1 = D1_1$. Поэтому

$$C1_1 = D1_1 \ll D1(f,\frac{1}{n_1+1}).$$

Оценим $C1_2 = \Big(\sum\limits_{m_1=n_1+1}^{\infty} m_1^{q-2}\Big\{\sum\limits_{k_2=1}^{\infty} a_{m_1k_2}^p k_2^{p-2}\Big\}^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{1}{q}}$. Применяя неравенство Минковского (лемма 10), получим

$$C1_2 = \Big(\Big(\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\Big\{\sum_{k_2=1}^{\infty} a_{m_1k_2}^p k_2^{p-2} m_1^{p(1-\frac{2}{q})}\Big\}^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}\Big(\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty}\Big\{a_{m_1k_2}^p k_2^{p-2} m_1^{p(1-\frac{2}{q})}\Big\}^{\frac{q}{p}}\Big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p-2}\Big(\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} a_{m_1k_2}^q m_1^{q(1-\frac{2}{q})}\Big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty} k_2^{p-2}\Big(\sum_{m_1=n_1+1}^{\infty} a_{m_1k_2}^q m_1^{q-2}\Big)^{\frac{p}{q}}\Big)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= D1_2 \ll D1(f,\frac{1}{n_1+1}).$$

Объединяя полученные оценки для $C1_i$ $(i=1,2)$, получим оценку сверху

$$C1(f,\delta_1) \ll D1(f,\frac{1}{n_1+1}) \ll D1(f,\delta_1).$$

Теперь покажем, что $D1(f,\delta_1) \ll C1(f,\delta_1)$. Для каждого $\delta_1 \in (0,\frac{1}{2})$ существует натуральное число n_1 такое, что $\frac{1}{n_1+2} \le \delta_1 < \frac{1}{n_1+1}$. Тогда

$$D1(f,\delta_1) \ll D1(f,\frac{1}{n_1+1}).$$

Применяя лемму 8, получаем, что

$$D1(f,\delta_1) \ll D1(f,\frac{1}{n_1+1}) \asymp D1_1 + D1_2.$$

Оценим сверху $D1_i$ $(i=1,2)$. Из леммы 8 следует, что $C1_1 = D1_1$. Поэтому

$$D1_1 \ll C1(f,\frac{1}{n_1+1}).$$

Оценим

$$D1_2 = \Big(\sum_{k_2=1}^{\infty}\Big\{\sum_{k_1=n_1+1}^{\infty} a_{k_1k_2}^q k_1^{q-2}\Big\}^{\frac{p}{q}} k_2^{p-2}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя лемму 4, имеем

$$D1_2 \ll \omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{n_1}\Big)_{qp}.$$

Для n_1 найдется натуральное число ν_1 такое, что $2^{\nu_1-1} \le n_1 < 2^{\nu_1}$. Тогда

$$D1_2 \ll \omega_{\alpha_1,0}\Big(f,\frac{1}{2^{\nu_1}}\Big)_{qp}.$$

Применяя лемму 2, получим оценку

$$D1_2 \ll \left\| f - S_{2^{\nu_1},\infty}(f) \right\|_{qp} + 2^{-\nu_1\alpha_1} \left\| S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\nu_1},\infty}(f) \right\|_{qp}.$$

Применяя леммы 11 и 2, имеем

$$2^{-\nu_1\alpha_1} \left\| S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\nu_1},\infty}(f) \right\|_{qp} \ll 2^{-\nu_1\alpha_1} 2^{\nu_1\theta} \left\| S^{(\alpha_1,0)}_{2^{\nu_1},\infty}(f) \right\|_{pp} \ll 2^{\nu_1\theta} \omega_{\alpha_1,0}\Big(f, \frac{1}{2^{\nu_1}}\Big)_{pp} \ll C1(f,\delta_1).$$

Теперь оценим сверху $\left\| f - S_{2^{\nu_1},\infty}(f) \right\|_{qp}$.

Применяя лемму 12, получим

$\|f - S_{2^{\nu_1},\infty}(f)\|_{qp} \ll \| \sum\limits_{m_1=\nu_1}^{\infty} (S_{2^{m_1},\infty}(f) - S_{2^{m_1+1},\infty}(f))\|_{qp}.$

Применяя лемму 11, имеем

$$\|f - S_{2^{\nu_1},\infty}(f)\|_{qp} \ll \| \sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} (S_{2^{m_1},\infty}(f) - S_{2^{m_1+1},\infty}(f))\|_{qp} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \Big(2^{m_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|S_{2^{m_1},\infty}(f) - S_{2^{m_1+1},\infty}(f)\|_{pp} \Big)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Big(\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \Big(2^{m_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (\|f - S_{2^{m_1},\infty}(f)\|_{pp} + \|f - S_{2^{m_1+1},\infty}(f)\|_{pp}) \Big)^q \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя лемму 2 и используя свойства частного модуля гладкости, получим

$$\|f - S_{2^{\nu_1},\infty}(f)\|_{qp} \ll \Big(\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \Big(2^{m_1(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha_1,0}(f, \frac{1}{2^{m_1}}) \Big)^q \Big)^{\frac{1}{q}} \ll C1(f,\delta_1).$$

Тем самым показано, что

$$D1_2 \ll C1(f,\delta_1).$$

Объединяя полученные оценки для $D1_i$ $(i = 1, 2)$, получим итоговую оценку сверху

$$D1(f,\delta_1) \ll C1(f,\delta_1).$$

Пункт I теоремы доказан.

Доказательство пункта II теоремы следует из леммы 9, так как $C2_1 = D2_1, C2_2 = D2_2$.

Теорема доказана полностью.

Заключение. В работе рассмотрены функции двух переменных с монотонными коэффициентами Фурье. Для таких функций получены оценки, распространяющие неравенство типа Коляды для частных модулей гладкости на двумерный случай.

Кроме того, из оценок, приведенных в теореме, вытекают оценки типа неравенства Ульянова для частных модулей гладкости. А именно:

Пусть $f \in M_{pp}, 1 < p < q < \infty,$ $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_i > \theta, \delta_i \in (0, \frac{1}{2}),$ $i = 1, 2.$ Тогда

$$\omega_{\alpha_1,0}(f,\delta_1)_{qp} \ll \left(\int_0^{\delta_1} t_1^{-q\theta} \omega^q_{\alpha_1,0}(f,t_1)_{pp} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2}(f,\delta_2)_{pq} \ll \left(\int_0^{\delta_2} t_2^{-q\theta} \omega^q_{0,\alpha_2}(f,t_2)_{pp} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При дополнительных ограничениях на параметры из теоремы следуют неравенства, уточняющие неравенства типа Ульянова, а именно:

Пусть $f \in M_{pp}, 1 < p < q < \infty,$ $1 < p \le 2,$ $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_i > \theta, \delta_i \in (0, \frac{1}{2}),$ $i = 1, 2.$ Тогда

$$\omega_{\alpha_1-\theta,0}(f,\delta_1)_{qp} \ll \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q\theta}\omega_{\alpha_1,0}^q(f,t_1)_{pp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\omega_{0,\alpha_2-\theta}(f,\delta_2)_{pq} \ll \left(\int\limits_0^{\delta_2} t_2^{-q\theta}\omega_{0,\alpha_2}^q(f,t_2)_{pp}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя лемму 14 и проводя рассуждения, аналогичные тем, что использовались при доказательстве теоремы, можно получить следующие оценки для частных модулей гладкости производной функции через частные модули гладкости самой функции.

Пусть $f \in M_{pp}, 1 < p < q < \infty,\ \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_i > \theta, \delta_i \in (0, \frac{1}{2}), \rho_i > 0,\ i = 1, 2.$ Тогда

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta}\left(\int\limits_{\delta_1}^{1} t_1^{-p(\alpha_1-\theta)}\omega_{\alpha_1,0}^p(f^{(\rho_1,0)},t_1)_{qp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\int\limits_0^{\delta_1} t_1^{-q(\theta+\rho_1)}\omega_{\alpha_1+\rho_1,0}^q(f,t_1)_{pp}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\delta_2^{\alpha_2-\theta}\left(\int\limits_{\delta_2}^{1} t_2^{-p(\alpha_2-\theta)}\omega_{0,\alpha_2}^p(f^{(0,\rho_2)},t_2)_{pq}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\int\limits_0^{\delta_2} t_2^{-q(\theta+\rho_2)}\omega_{0,\alpha_2+\rho_2}^q(f,t_2)_{pp}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Список литературы

1 Ульянов П.Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. Матем. -1968. Т. 32. -С. 649-686.

2 Ульянов П.Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Матем. сб. -1970. -Т. 81(123). -№ 1. -С. 104-131.

3 Темиргалиев Н. Некоторые теоремы вложения классов функций $H_{p,m}^\omega$ многих переменных // Изв. АН Каз. ССР, Сер. физ.-мат. -1970. -№ 5. -С. 90-92.

4 Темиргалиев Н. О вложении в некоторые пространства Лоренца // Изв. вузов. Математика. -1980. -№ 6. -С. 83-85.

5 Темиргалиев Н. О вложении классов H_p^ω в пространства Лоренца // Сиб. мат. журн. -1983. -Т. 24. -№ 2. -С 160-172.

6 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Соотношения между смешанными модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского // Тр. МИАН. -2010. -Т. 269. -С. 204-214.

7 Kolomoitsev Yu., Tikhonov S. Properties of moduli of smoothness in $L_p(\mathbb{R}^d)$ // J. Approx. Theory. -2020. -Vol. 257. -P. 1-29.

8 Kolomoitsev Yu., Tikhonov S. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities// Mem. Amer. Soc. -2021. arXiv: 1711.08163.

9 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Модули гладкости дробных порядков, Часть III. -Москва: Попечительский Совет механико-математичесокого факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, 2015.

10 Коляда В.И. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. Матем. ин-та АН СССР. -1988. -Т. 181. -С. 117-136.

11 Гольдман М.Л. О вложении конструктивных и структурных Липшицевых пространств в симметричные // Труды МИАН СССР. -1986. -Т. 173. -С. 90-112.

12 Domingues O., Tikhonov S. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities, htpp://arXiv: 1909. 12818v2 [math.FA] 22. Nov 2019.

13 Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces // Arch. Math. -2010. -Vol. 94. -P. 155-164.

14 Симонов Б.В., Симонова И.Э., Иванюк В.А. Неравенство Коляды для частных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье // Известия Саратовского университета. Новая серия: Математика. Механика. Информатика. -2022. -Т. 22/ -Вып. 4. -С. 447-457.

15 Потапов М.К., Симонов Б.В., Тихонов С.Ю. Дробные модули гладкости. -Москва: МАКС Пресс, 2016.

16 Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1975.

17 Potapov M.K., Simonov B.V. and Tikhonov S.Yu. Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients // Jaen Journal on Approximation. -2009. 1(2). -P. 205-222.

18 Потапов М.К., Симонов Б.В. Усиленные неравенства Ульянова для частных модулей гладкости функций из пространств с различными смешанными метриками // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. -2019. -№ 3. -С. 26-39.

19 Вуколова Т.М. Оценки смешанных норм производных и смешанных модулей гладкости функций, имеющих монотонные коэффициенты Фурье // Матем. заметки. -2015. -Т. 97. -Вып. 6. -С. 841-854.

20 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. -Москва: Наука, 1977.

21 Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. -1995. -№ 3. -С. 22-32.

22 Потапов М.К., Симонов Б.В. Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов // Известия вузов. Математика. -2019. -№ 1. -С. 1-14.

23 Потапов М.К., Симонов Б.В. Оценки частных модулей гладкости в метриках $L_{p_1\infty}$ и $L_{\infty p_2}$ через частные модули гладкости в метриках $L_{p_1p_2}$ // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. -2020. -№ 1. -С. 3-17.

И.Э. Симонова, Б.В. Симонов

Волгоград мемлекеттік техникалық университеті, Ленин даңғ., 28, Волгоград, 400005, Росей

Фурье коэффициенттері монотонды функциялардың дербес тегістік модулдері арасындағы қатынастар

Аннотация. L_q кеңістігінен алынған функцияның тегістік модулін одан кеңірек L_p Лебег классының тегістік модельдері терминімен бағалау мәселесі бұрыннан белгілі. Бастапқы кезеңдерде Титчмарш, Харди, Литтлвуд, Никольскийлердің жұмыстарында Липшиц классынан алынған функциялардың қасиеттері зерттеліп, сәйкес кірістірулер алынды. П.Л. Ульянов кейінірек өзінің атымен "Ульянов теңсіздігі" деп аталаған бір айнымалылы функцияның үзіліссіздік модулі үшін теңсіздік алды. Липшиц кеңістігі үшін алынған Харди-Литтлвудтің классикалық кірістіруі Ульянов теңсіздігінің салдары болып табылады. В.А. Андриенко көрсеткендей Ульянов теңсіздігі H_p^ω кластарының шкаласында дәл. Бұл бағыттың ары қарай дамуы В.А. Андриенко, Э.А. Стороженко, М.К. Потапов, Л. Лейндлер, В.И. Коляда, П. Освальд, Н. Темиргалиев, С.В. Лапин және тағы да басқа математиктердің жұмыстарымен байланысты. В.И. Коляда Ульянов теңсіздігін ары қарай күшейтуге болатындығын және де сәйкес "Коляда теңсіздігін" дәлелдеді. Коляда теңсіздігі L_p кеңістігінен үзіліссіздік модулінің кез келген берілген реті үшін δ-ның бір де бір мәнінде алынған бағаны жақсартуға болмайтын функция бар болатындығын береді. Ю.В. Нетрусов, М.Л. Гольдман, У. Требель Коляда теңсіздігін жоғарғы ретті тегістік модуліне таратқан. Зерттеудің тағы бір бағыты М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С.Ю. Тихонов жұмыстарындағы бөлшек тегістік модулі жағдайындағы зерттеулер. Бұл Ульянов теңсіздігін күшейтуге мүмкіндік берді, тегістіктің бөлшек модульдерін қолданудың ерекшелігі мен онсыз соңғы нәтижелерді алу мүмкін емес екендігін білдіретін маңыздылығын көрсетті.

Бұл мақалада екі айнымалылы функцияның дербес тегістік модулдері зерттеледі. Коляда теңсіздігін Фурье коэффициенттері монотонды функциялар үшін дербес тегістік модульдеріне тарататын теңсіздіктер алынған. Сонымен қатар, Фурье коэффициенттері монотонды функция туындыларының дербес тегістік модульдері бастапқы функцияның дербес тегістік модульдері арқылы юағаланған.

Түйін сөздер: метрика, жеке тегістік модулы, монотонды Фурье коэффициенттері.

I.E. Simonova, B.V. Simonov

Volgograd State Technical University, Lenin avenue, 28, Volgograd, 400005, Russia

Reletions between partial moduli of smoothness of functions with monotone Fourier coefficients

Аннотация. The problem of estimating the moduli of smoothness of functions from L_q in terms of moduli of smoothness from the broader Lebesgue class L_p has been known for a long time. At the initial stage, in the works of Titchmarsh, Hardy, Littlewood, Nikolsky, the properties of functions from Lipschitz classes were studied and the corresponding embeddings were obtained. For moduli of continuity of functions of one variable P.L. Ulyanov proved an inequality later named after him - "Ulyanov's inequality". The classical Hardy-Littlewood embedding for Lipschitz spaces is a consequence of Ulyanov's inequality. As V.A. Andrienko showed, Ulyanov's inequality is exact in the scale of classes H_p^ω. Further development of this direction is connected with the works of V.A. Andrienko, E.A. Storozhenko, M.K. Potapov, L. Leindler, V.I. Kolyada, P. Oswald, N. Temirgaliev, S.V. Lapin and other mathematicians.

Kolyada proved that Ulyanov's inequality can be strengthened and proved the corresponding "Kolyada's inequality". Kolyada's inequality is exact in the sense that there exists a function in L_p with any given order of the modulus of continuity for which this estimate cannot be improved for any value of δ. Yu.V. Netrusov, M.L. Goldman and W. Trebelz extended Kolyada's inequality to the moduli of smoothness of higher orders. Another direction of research was the study of fractional moduli of smoothness in the works of M.K. Potapov, B.V. Simonov, S.Yu. Tikhonov. This made it possible to strengthen the Ulyanov inequality and showed the specificity and special significance of using fractional moduli of smoothness, without which, as it turned out, it was impossible to obtain final results.

In this article, we study partial moduli of smoothness of functions of two variables. Inequalities are obtained that extend Kolyada's inequality to partial moduli of smoothness for functions with monotone Fourier coefficients. Estimates are also obtained for the partial moduli of smoothness of the derivative of a function with monotone Fourier coefficients in terms of the partial moduli of smoothness of the original function.

Keywords: metric, partial modulus of smoothness, monotone Fourier coefficients.

References

1 Ul'yanov P.L. The imbedding of certain function classes H_p^ω , Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1968. Vol. 32. №3. P. 649–686 [Math. USSR-Izv. 1968. Vol. 2. №3. P. 601–637]

2 Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics, Math. USSR-Sb. 1970. Vol. 10. №1. P. 103–126.

3 Temirgaliyev N. Nekotorye teoremy vlozheniya klassov funkcij $H_{p,m}^\omega$ mnogih peremennyh[Some imbedding theorems for function classes $H_{p,m}^\omega$ of many variables], Izv. AN Kaz. SSR, Ser. fiz.-mat. [Izv. AN Kaz. SSR, Ser. Phys.-Math.] 1970. №5. P. 90-92.

4 Temirgaliev N. O vlozhenii v nekotorye prostranstva Lorenca[On embedding in certain Lorentz spaces], Izv. vuzov. Matem. [Izv. universities. Mat.,]. 1980, №6. P. 83–85.

5 Temirgaliev N. Imbedding of classes H_p^ω in Lorentz spaces, Siberian Math. J. 1983. Vol. 24. №2. P. 287–298

6 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S. Yu. Relations between mixed moduli of smoothness, and embedding theorems for Nikol'skii classes, Proc. Steklov Inst. Math. 2010. Vol. 269. P. 197–207

7 Kolomoitsev Yu., Tikhonov S. Properties of moduli of smoothness in $L_p(\mathbb{R}^d)$, J. Approx. Theory. 2020. Vol. 257. P. 1-29.

8 Kolomoitsev Yu., Tikhonov S. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities, Mem. Amer. Soc. 2021. arXiv: 1711.08163.

9 Potapov M.K., Simonov B.V., Tihonov S.YU. Moduli gladkosti drobnyh poryadkov, CHast' III[Moduli of smoothness of fractional orders, Part III]. Moskow: Popechitel'skij Sovet mekhaniko-matematichesokogo fakul'teta MGU imeni M.V. Lomonosova [Board of Trustees of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University named after M.V. Lomonosov], 2015.

10 Kolyada V.I. On the relations between moduli of continuity in various metrics, Proc. Steklov Inst. Math. 1989. Vol. 181. P. 127–148

11 Gol'dman M.L. Embedding of constructive and structural Lipschitz spaces in symmetric spaces, Proc. Steklov Inst. Math. 1987. Vol. 173. P. 93–118

12 Domingues O., Tikhonov S. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities, htpp://arXiv: 1909. 12818v2 [math.FA] 22. Nov 2019.

13 Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces, Arch. Math. 2010. Vol. 94. P. 155-164.

14 Simonov B.V., Simonova I.E., Ivanyuk V.A. Neravenstvo Kolyady dlya chastnyh modulej gladkosti funkcij s lakunarnymi koefficientami Fur'e[Kolyada's inequality for partial moduli of smoothness of functions with lacunar Fourier coefficients], Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika[Izv. Sarat. university New ser. Ser.: Mathematics. Mechanics. Informatics], 2022. Vol. 22. №4. P. 447–457

15 Potapov M.K., Simonov B.V., Tikhonov S.Yu. Drobny'e moduli gladkosti[Fractional moduli of smoothness]. Moskow: MAKC Press, 2016.

16 Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M. Integral'ny'e predstavleniya funkczij i teoremy' vlozheniya[Integral representations of functions and embedding theorems]. Moskow: Nauka, 1975.

17 Potapov M.K., Simonov B.V. and Tikhonov S.Yu. Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients, Jaen Journal on Approximation. 2009. 1(2). P. 205-222.

18 Potapov M.K., Simonov B.V. Strengthened Ul'yanov's inequalities for partial moduli of smoothness for functions from spaces with various metrics, Moscow University Mathematics Bulletin, 2019. Vol. 74. №3. P. 108–120

19 Вуколова Т.М. Оценки смешанных норм производных и смешанных модулей гладкости функций, имеющих монотонные коэффициенты Фурье // Матем. заметки. -2015. -Т. 97. -Вып. 6. -С. 841-854.

20 Nikol'skij S.M. Priblizhenie funkczij mnogikh peremenny'kh i teoremy' vlozheniya[Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. Moskow: Nauka, 1977.

21 Vukolova T.M., D'yachenko M.I. O svojstvakh summ trigonometricheskikh ryadov s monotonny'mi koe'fficzientami[On the properties of sums of trigonometric series with monotone coefficients], Vestn. Mosk. un-ta. Matem. Mekhan. [Vestn. Moscow university Mat. Mechan.]. 1995. №3. P. 22-32.
22 Potapov M.K., Simonov B.V. Nikolskii inequalities for trigonometric polynomes in different metrics, Russian Math. (Iz. VUZ)ю 2019. Vol. 63. №1. P. 42–54
23 Potapov M.K., Simonov B.V. Estimates of partial smoothness moduli in metrics $L_{p_1\infty}$ and $L_{\infty p_2}$ by partial smoothness moduli in the metrics $L_{p_1p_2}$, Moscow University Mathematics Bulletin. 2020. Vol. 75. №1. P. 1–15

Сведения об авторах:

Симонов Борис Витальевич – ***автор для корреспонденции,*** доцент, кафедра прикладной математики, факультет технологии пищевых производств, Волгоградский государственный технический университет, пр. Ленина, 28, г. Волгоград, 400005, Россия.

Симонова Ирина Эдуардовна – доцент, кафедра прикладной математики, факультет технологии пищевых производств, Волгоградский государственный технический университет,пр. Ленина, 28, г. Волгоград, 400005, Россия.

Simonov Boris Vitalevich – ***corresponding author,*** Docent, Applied Mathematics, Food Engineering Faculty, Volgograd State Technical University, Lenin avenue, 28, Volgograd, 400005, Russia.

Simonova Irina Eduardovna – Docent, Applied Mathematics, Food Engineering Faculty, Volgograd State Technical University, Lenin avenue, 28, Volgograd, 400005, Russia.

Поступила в редакцию 15.03.2023