Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2022, Vol. 140, №3, P.15-22
http://bulmathmc.enu.kz, E-mail: vest_math@enu.kz

МРНТИ: **27.43**

А.Ж. Жубанышева, Г.Е. Таугынбаева, Н.Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, Сатпаева, 2, Нур-Султан, 010008, Казахстан
(E-mail: zhubanysheva_azh@enu.kz)

Об одном проблемном моменте в учебниках по Теории вероятностей [1]

Аннотация: Изучается, на наш взгляд, имеющийся в учебниках по Теории вероятностей проблемный момент "*Произвели эксперимент, известен исход. Произошло ли событие?*" и связанные с ним вычисления частот осуществления данного события в контексте определения вероятности. Именно, проводятся теоретические и практические развернутые обсуждения этих тем с обоснованиями.

Ключевые слова: вероятностное пространство, событие, реализация события, исход, вероятность, эксперимент с конечным числом исходов.

DOI: https://doi.org/10.32523/2616-7182/bulmathenu.2022/3.2

2000 Mathematics Subject Classification: 97K50.

Введение. Еще в древности сказано "*Подвергай все сомнению*" с постоянным критическим восприятием всего сущего. Так, например, учебник А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина [1] носит название "Элементы теории функций и функционального анализа", в то время как текст по содержанию выполнен в обратном порядке, что существенно ограничило первую часть "Функциональный анализ", оставив без иллюстраций важнейшие объекты типа "Гильбертовы пространства", основной реализацией которого является Лебегово пространство $L^2(\Omega)$. Невозможность применения Лебеговского интегрирования моментально отражается на полноте изложения обобщенных функций (см. [2]).

Другого сорта проблемы в усвоении темы "Теория пределов" в знаменитом учебнике Г.М. Фихтенгольца [3] вызывает фраза "Для любого сколь угодно малого положительного ε". При применении сразу же возникает вопрос "Взяли $\varepsilon > 0$, оно малое? Или надо взять еще меньше?". Тогда как каждое отдельно взятое число не обладает свойством быть "большим" или "малым". Это свойство возникает при сравнении с другим числом: число 5 одновременно "малое" по сравнению с числом 6 и "большое" по сравнению с числом 4, - об этом казахи давно сказали "Берушiге бесеу көп, алушыға алтау аз". Продолжая этот эпизод отметим, что учебник Фихтенгольца был бы более понятным, если рассуждения велись бы с объяснениями "Число $\varepsilon > 0$ одновременно и фиксированное, и произвольное". "Фиксированное" по той причине, что "$\varepsilon > 0$" конкретное число - это с одной стороны, с другой стороны "ε произвольное положительное число", поскольку на ε, кроме быть положительным, никакое другое условие не налагается. И так можно продолжить в большом количестве, но ограничимся еще двумя примерами. По определению дифференциала как "Главной линейной части приращения функции, являющейся бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с приращением аргумента", в котором разъяснение о бесконечной малости дифференциала переводит эту обычную линейную функцию на совершенно другой уровень неверного понимания. Точно также, Числовой ряд в контексте "Бесконечная сумма" приобретает смысл только через предельный переход, поскольку можно сложить два числа, три числа и любое конечное

[1] Работа выполнена в рамках проекта AP14872564 МОН РК.

множество чисел, но нельзя сложить числа в бесконечном количестве, что не разъясняется опять же в ущерб пониманию.

Данная статья посвящена одному такому же проблемному эпизоду, одному, но оказывающему принципиальное влияние на усвоение всей теории в классических и новейших учебниках Теории вероятностей.

Необходимые предварительные сведения. В самом общем понимании Теория вероятностей изучает различные явления (эксперимент, наблюдение, опыт и с такими же подобными названиями) с непредсказуемым исходом, но возможное множество которых в том или ином смысле известно.

Математической моделью эксперимента является вероятностная тройка $(\Omega, \sigma F, P)$. Здесь Ω - множество всевозможных исходов, называемых элементарными событиями, σF - σ-алгебра подмножеств множества Ω, называемых событиями и P вероятность - числовая функция на этой σ-алгебре, удовлетворяющая следующим условиям: $P(\Omega) = 1$, для любого A из σ-алгебры событий σF вероятность неотрицательна, т.е. для всех A из σF выполняется $P(A) \geq 0$ и является σ-аддитивной, т.е. для любой конечной или счетной последовательности непересекающихся множеств A_i из σF выполняется равенство $P(\sum\limits_i A_i) = \sum\limits_i P(A_i)$.

В Теории вероятностей необходимо четко отличать "эксперимент", "реализация эксперимента", "исход (реализации) эксперимента", "элементарное событие", "событие" и "вероятность события".

Теперь сформулируем вопрос, чему посвящена данная статья и который, на наш взгляд, в отчетливо-ясном виде не описывается ни в одном, по крайней мере, из доступных нам учебниках: "*Произвели эксперимент, известен исход. Произошло ли событие?*". То же по-другому: Имеем конкретное событие, произведен эксперимент, известен его исход. Что означает "*В результате эксперимента зафиксированное событие произошло*" и что означает "*В результате эксперимента зафиксированное событие не произошло*"?

Ответ такой: если полученный исход как элементарное событие есть элемент зафиксированного события, то говорят, что произошло *зафиксированное событие*. Понятно, что другие элементарные события, в их числе и из зафиксированного события, если таковые имеются, при произведенном эксперименте произойти не могут.

Если же полученный исход не есть элемент зафиксированного события, то говорят, что *зафиксированное событие* не произошло.

Особо подчеркнем, что всякое конкретное событие состоит из элементарных событий, каждое из которых является шансом для реализации всего события, реализация одного из шансов - одного элементарного события обеспечивает выполнение всего события, а остальные можно понимать как еще не реализованные шансы.

В статье мы ограничимся только экспериментом с конечным числом исходов, тогда σ-алгебра σF превращается в алгебру F, состоящую из всех подмножеств множеств Ω, а само событие, относящееся к центральным понятиям, есть произвольное подмножество множества Ω.

Пример эксперимента (который на протяжении всей статьи будем обозначать готической буквой $\Re$), **состоящего из последовательного подбрасывания двух монет, затем одной игральной кости и его полное вероятностное описание.**

Имеем, $\Re$: Монета №1 и Монета №2 со сторонами "Герб" и "Решетка", Игральная кость.

В таблице 1 для данного примера представлены "эксперимент", "реализация эксперимента" и "исход эксперимента":

Таблица 1

Эксперимент $\Re$	Последовательное подбрасывание двух монет, затем одной игральной кости
Реализация эксперимента $\Re$	Сначала подбрасывается Монета №1, затем - Монета №2 и, наконец, - Игральная кость
Всевозможные исходы эксперимента $\Re$ - элементарные события	$(\Gamma,\Gamma,1),(\Gamma,\Gamma,2),(\Gamma,\Gamma,3),(\Gamma,\Gamma,4),(\Gamma,\Gamma,5),(\Gamma,\Gamma,6),$ $(\Gamma,\mathrm{P},1),(\Gamma,P,2),(\Gamma,P,3),(\Gamma,P,4),(\Gamma,P,5),(\Gamma,P,6),$ $(P,\Gamma,1),(P,\Gamma,2),(P,\Gamma,3),(P,\Gamma,4),(P,\Gamma,5),(P,\Gamma,6),$ $(P,P,1),(P,P,2),(P,P,3),(P,P,4),(P,P,5),(P,P,6)$

В рассматриваемом нами примере событием является любое подмножество множества
$\Omega=\{(\Gamma,\Gamma,1),(\Gamma,\Gamma,2),(\Gamma,\Gamma,3),(\Gamma,\Gamma,4),(\Gamma,\Gamma,5),(\Gamma,\Gamma,6),(\Gamma,P,1),(\Gamma,P,2),(\Gamma,P,3),(\Gamma,P,4),$ $(\Gamma,P,5),(\Gamma,P,6),(P,\Gamma,1),(P,\Gamma,2),(P,\Gamma,3),(P,\Gamma,4),(P,\Gamma,5),(P,\Gamma,6),(P,P,1),(P,P,2),$ $(P,P,3),(P,P,4),(P,P,5),(P,P,6)\}$.

Так как количество элементов в Ω равно 24, то множество всевозможных подмножеств, т.е. алгебра событий F состоит из $2^{24}=16777216$ элементов. На данном этапе рассмотрений вероятность остается неконкретизированной произвольной.

Из теоретически всех возможных событий 16 777 216 данного эксперимента выберем четыре:

$A=\{(\Gamma,P,5),(P,P,3)\}$,

B - на игральной кости выпало четное число:

$B=\{(\Gamma,\Gamma,2);(\Gamma,\Gamma,4);(\Gamma,\Gamma,6);(\Gamma,P,2);(\Gamma,P,4);$
$(\Gamma,P,6);(P,\Gamma,2);(P,\Gamma,4);(P,\Gamma,6);(P,P,2);(P,P,4);(P,P,6)\}$,

$C=A\cup B=\{(\Gamma,\Gamma,2);(\Gamma,\Gamma,4);(\Gamma,\Gamma,6);(\Gamma,P,2);(\Gamma,P,4);(\Gamma,P,5);(\Gamma,P,6);(P,\Gamma,2);$
$(P,\Gamma,4);(P,\Gamma,6);(P,P,2);(P,P,3)\}$,

$D=\{(\Gamma,\Gamma,1),(\Gamma,\Gamma,3),(\Gamma,\Gamma,6),(\Gamma,P,2),(\Gamma,P,3),(\Gamma,P,4),(P,\Gamma,1),(P,\Gamma,3),$
$(P,\Gamma,4),(P,P,3),(P,P,4),(P,P,5)\}$.

Читателю предлагается самостоятельно подготовить материальную базу эксперимента из двух монет "Сначала подбрасывается Монета №1, затем - Монета №2, и, наконец, - Игральная кость". ,

затем провести реализацию эксперимента из двух упорядоченных монет и одной игральной кости, и проводить в нужном количестве сами эксперименты, с фиксацией в каждом случае исхода эксперимента - элементарного события. Затем провести реализацию эксперимента "Сначала подбрасывается Монета №1, затем - Монета №2, и, наконец, - Игральная кость". В результате эксперимента имеем элементарное событие - ровно один элемент множества Ω. Задача заключается в том, чтобы определить какое из выделенных нами событий A,B,C,D произошло, а какое нет.

Реализация № 1 Эксперимента $\Re$ с исходом $(\Gamma,P,5)$**.** Произведен эксперимент - подбрасывается Монета №1, фиксируется исход ”Г” или "Р", далее подбрасывается Монета №2, фиксируется исход ”Г” или "Р" и затем подбрасывается Игральная кость, фиксируется исход, - одно из чисел $1,2,3,4,5,6$. В итоге формируется исход эксперимента - элементарное событие из набора Ω.

Допустим при реализации эксперимента получен следующий исход $(\Gamma,P,5)$, т.е. результат подбрасывания Монеты №1 есть "Герб", далее результат подбрасывания Монеты №2 есть "Решетка" и результат подбрасывания Игральной кости есть 5. Для этого исхода определим выполнение или невыполнение каждого из событий A,B,C,D. Поскольку,

$$(\Gamma,P,5)\in A=\{(\Gamma,P,5);(P,P,3)\},$$

то событие A выполнено. Далее,

$$(\Gamma,P,5)\in B=\{(\Gamma,\Gamma,2);(\Gamma,\Gamma,4);(\Gamma,\Gamma,6);(\Gamma,P,2);(\Gamma,P,4);(\Gamma,P,6);(P,\Gamma,2);(P,\Gamma,4);$$

$$(P,\Gamma,6);(P,P,2);(P,P,4);(P,P,6)\},$$

поэтому событие B не выполнено. Затем,

$$(\Gamma,P,5)\in C=\{(\Gamma,\Gamma,2);(\Gamma,\Gamma,4);(\Gamma,\Gamma,6);(\Gamma,P,2);(\Gamma,P,4);(\Gamma,P,5);(\Gamma,P,6);(P,\Gamma,2);$$

$$(P,\Gamma,4);(P,\Gamma,6);(P,P,2);(P,P,3);(P,P,4)\},$$

стало быть событие C выполнено. И наконец событие D не выполнено, так как

$$(\Gamma,P,5)\in D=\{(\Gamma,\Gamma,1),(\Gamma,\Gamma,3),(\Gamma,\Gamma,6),(\Gamma,P,2),(\Gamma,P,3),(\Gamma,P,4),(P,\Gamma,1),$$

$$(P,\Gamma,3),(P,\Gamma,4),(P,P,3),(P,P,4),(P,P,5)\}.$$

Таким образом, исход эксперимента - элементарное событие $(\Gamma,P,5)$ как элемент содержится в A и C, и не содержится в B и D, что по определению "*Произвели эксперимент, известен исход. Произошло ли событие?*" означает, что в Эксперименте №1 события A и C произошли, а события B и D не произошли.

В полном понимании связки "Исход эксперимента - событие" для события A элементерное событие $(\Gamma,P,5)$ есть реализованный шанс, а элементарное событие $(P,P,5)$ является нереализованным шансом.

То же самое повторяется в остальных случаях. Приведем еще один пример без развернутых обсуждений.

Реализация № 2 Эксперимента $\Re$ с исходом $(P,P,4)$. Проведем еще одну реализацию эксперимента и пусть при подбрасывании Монеты №1 выпала "Решетка", при подбрасывании Монеты №2 выпала также "Решетка" и при подбрасывании игральной кости выпала 4, тогда исход эксперимента $(P,P,4)$. Посмотрим, какое из событий A,B,C и D произошло, а какое нет. Имеем,

$(P,P,4)\in A=\{(\Gamma,P,5),(P,P,3)\}$

$(P,P,4)\in B=\{(\Gamma,\Gamma,2);(\Gamma,\Gamma,4);(\Gamma,\Gamma,6);(\Gamma,P,2);(\Gamma,P,4);$
$(\Gamma,P,6);(P,\Gamma,2);(P,\Gamma,4);(P,\Gamma,6);(P,P,2);(P,P,4);(P,P,6)\}$

$(P,P,4)\in C=A\cup B=\{(\Gamma,\Gamma,2);(\Gamma,\Gamma,4);(\Gamma,\Gamma,6);(\Gamma,P,2);(\Gamma,P,4);(\Gamma,P,5);(\Gamma,P,6);(P,\Gamma,2);$
$(P,\Gamma,4);(P,\Gamma,6);(P,P,2);(P,P,3)\}$

$(P,P,4)\in D=\{(\Gamma,\Gamma,1),(\Gamma,\Gamma,3),(\Gamma,\Gamma,6),(\Gamma,P,2),(\Gamma,P,3),(\Gamma,P,4),(P,\Gamma,1),(P,\Gamma,3),$
$(P,\Gamma,4),(P,P,3),(P,P,4),(P,P,5)\}$.

Во второй реализации Эксперимента $\Re$, событие A не произошло, поскольку $(P,P,4)$ не содержится в A, а события B,C и D произошли, так как $(P,P,4)$ как элемент принадлежит этим множествам.

Перейдем к практической реализации Эксперимента $\Re$: согласно теории имеем эксперимент и соответствующее ему вероятностное пространство $(\Omega,\sigma F,P)$, также есть событие $E\in\sigma F$ и его вероятность $P(E)$. Что дает знание числа $P(E)$?

Здесь будем использовать частотную интерпретацию вероятности, смысл которой заключается в следующем: Дано событие E, реализуем эксперимент N-ное количество раз и следим за тем, сколько раз событие E произошло - отношение числа появлений события к числу проведенных экспериментов близко к вероятности $P(E)$, причем эта близость имеет тенденцию увеличения с ростом числа экспериментов.

Практическое подтверждение частотной интерпретации вероятности дают опыты с подбрасыванием симметричной и однородной монеты (см. Таблицу 2). Слово "симметричный" означает, что монета имеет симметричную геометрическую форму целиндра, а "однородность" означает, что плотность монеты одинакова во всех точках.

В Таблице 2 приведены результаты опытов, проведенных Бюффоном, де Морганом, Джевонсом, Романовским, Пирсоном и Феллером:

Таблица 2

Экспериментатор	**Число бросаний**	**Частота выпадений Герба**
Бюффон (1707-1788) - французский натуралист, биолог, математик, естествоиспытатель	4040	0.507
Де Морган (1806-1871) - шотландский математик, логик	4090	0,505
Феллер У. (1906-1970) - американский математик	10000	0.4979
Джевонс (1835-1882) - английский экономист, философ	20480	0.5068
Пирсон К. (1857-1936) - английский математик, статист	24000	0,5005
Романовский В.И.(1879-1954) - советсткий математик	80640	0,4933

Любая реальная монета не является абсолютно симметричной и однородной, а изготовление монеты, близкой к идеальной, требует соответственно больших усилий и затрат. Поэтому опыты с симметричными и однородными монетами расцениваются как научный результат. Таким образом, вероятности выпадения герба и решетки, в силу близости монеты к идеальной, принимаются равными, т.е. вероятность $p = \frac{1}{2}$ для каждой из сторон, тем самым данные таблицы экспериментально подтверждают частотную интерпретацию вероятности.

По-видимому, к удивительным явлениям Мироздания надлежит отнести все эти эксперименты, когда разные люди, в разные времена, подбрасывая разные монеты, объединенные одним и тем же свойством симметричности и однородности изготовления, получают один и тот же результат - примерное равенство выпадения Герба и Решетки. Этому частотному опыту, по нашему мнению, в качестве наличия статистической регулярности, определяющее само существование Теории вероятностей, предшествовало замечательное наблюдение азартного игрока кавалера де Мере, который различил по здравому смыслу неразличимые частоты $\frac{25}{216}$ и $\frac{27}{216}$ событий, когда в игре с одновременным подбрасыванием 3-х игральных костей суммарное количество выпадающих очков 11 выпадало чаще, чем 12, в то время как по его расчетам 11 очков получаются в 6-ти случаях

$$(6-4-1),(6-3-2),(5-5-1),(5-4-2),(5-3-3),(4-4-3),$$

как и 12 очков в тех же по количеству 6-ти случаях

$$(6-5-1),(6-4-2),(6-3-3),(5-5-2),(5-4-3),(4-4-4).$$

Этому дали объяснение Паскаль и Ферма, оба в результате интенсивных обсуждений через переписку поняв, что помимо значений выпадающих цифр надо еще учитывать и порядок их появления, и тогда 11 выпадает в 27 случаях, 12 в 25 из всех возможных 216, по сути составили первую правильную вероятностную модель с констатацией "*Я вижу, что истина всегда одинакова: и в Париже, и в Тулузе*", тем самым подтверждая существование и самой теоретической науки, которая объясняет известное и открывает неизвестное (детали см. [6]).

Резюмируя, для определения численного значения вероятности каждого события данного эксперимента, согласно частотной интерпретации вероятности, последовательно проводится реализация эксперимента - первая, вторая, ... Фиксируем событие E, при каждой реализации эксперимента получаем свой исход и по нему с помощью определения наступления или не наступления события, точному описанию которого посвящена данная статья, отмечаем результат "событие E произошло" или "событие E не произошло".

Эту процедуру, на начальном этапе усвоения частотной интерпретации вероятности, для наглядности можно оформить в виде таблицы, в первой строке которой указывается номер реализации эксперимента, во второй - символы "+" (при данной реализации событие E произошло) или "-" (при данной реализации событие E не произошло):

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	$N-1$	N
+	-	-	-	+	-	+	+	-	-	...	+	+

В итоге, отношение числа результатов "событие E произошло" (количество "+") к числу всех реализаций N дает приближенное значение искомой вероятности данного события E.

Здесь особо подчеркнем, что об исходе (отсутствие детерминистической регулярности) каждой отдельной реализации эксперимента заранее ничего сказать нельзя, но можно указать долю наступления события в большом количестве реализаций эксперимента, что означает наличие статистической регулярности.

После такой теоретической подготовки перейдем к описанию схемы установления вероятностей элементарных событий при подбрасывании двух монет и игральной кости. Есть конкретные монеты, Монета №1, Монета №2, а также Игральная кость. Описанной процедурой посредством подбрасывания монет устанавливается приближенное значение вероятностей выпадения Герба и Решетки.

Согласно вышеуказанному описанию частотной интерпретации вероятности сначала находим вероятности Монеты №1, затем Монеты № 2 и, далее, игральной кости путем проведения серии экспериментов.

Определение вероятностей элементарных событий эксперимента подбрасывания Монеты № 1. По своим возможностям фиксируем целое положительное число N, желательно как можно большое. Сначала проводим N-кратное подбрасывание монеты, количество выпадения герба обозначим через $Q_1^{(1)}$. Затем вся эта процедура повторяется с количеством выпадения Герба $Q_1^{(2)}$. Последовательность таких испытаний называют серией, при каждом из которых получаем количество выпадения Герба $Q_1^{(k)}$, где k номер N-кратного подбрасывания монеты в Серии. Тогда, для каждого номера k число $\frac{Q_1^{(k)}}{N}$ есть частота выпадения Герба. Так полученные частоты выпадения Герба $Q_1^{(k)}$ должны иметь тенденцию группировки около одного числа. Наподобие числа $\frac{1}{2}$ при идеальном эксперименте с симметричной и однородной монетой, только здесь будет свое число для взятой реальной монеты. Например, под искомой вероятностью выпадения Герба для данной Монеты №1 можно объявить среднее арифметическое всех полученных частот $P_1^{(1)} = \frac{1}{l}\sum\limits_{j=1}^{l}\frac{Q_1^{(j)}}{N}$ в Серии из l N-кратных подбрасываний монеты.

Таким образом, вероятность выпадения Герба и Решетки для первой монеты равны соответственно $P_1^{(1)}$ и $P_2^{(1)} = 1 - P_1^{(1)}$.

То же проделывается со второй монетой и определяются вероятности выпадения Герба и Решетки для второй монеты соответственно $P_1^{(2)}$ и $P_2^{(2)}$.

И, наконец, та же процедура очевидным образом приспособленная к игральной кости приводит к вероятностной картине игральной кости, состоящей из вероятностей выпадения $1, 2, 3, 4, 5, 6,$ равных соответственно $P_1^{(3)}, P_2^{(3)}, P_3^{(3)}, P_4^{(3)}, P_5^{(3)}, P_6^{(3)}$.

Вернемся к изучаемому эксперименту $\Re$. В силу того, что подбрасывания монет и игральной кости осуществляется независимо друг от друга, для вероятностей элементарных событий получаем:

$$P(\{(\Gamma,\Gamma,1)\}) = P_1^{(1)}P_1^{(2)}P_1^{(3)}, P(\{(\Gamma,\Gamma,2)\}) = P_1^{(1)}P_1^{(2)}P_2^{(3)},$$

$$P(\{(\Gamma,\Gamma,3)\}) = P_1^{(1)}P_1^{(2)}P_3^{(3)}, \ldots, P(\{(P,P,3)\}) = P_2^{(1)}P_2^{(2)}P_3^{(3)},$$

$$P(\{(P,P,4)\}) = P_2^{(1)}P_2^{(2)}P_4^{(3)}, P(\{(P,P,5)\}) = P_2^{(1)}P_2^{(2)}P_5^{(3)}, P(\{(P,P,6)\}) = P_2^{(1)}P_2^{(2)}P_6^{(3)}.$$

Теперь определим вероятности событий A и B. В силу конечной-аддитивности вероятностной меры P получаем

$$P(A) = P(\{(\Gamma, P, 5); (P, P, 3)\}) = P(\{(\Gamma, P, 5)\}) + P(\{(P, P, 3)\}) =$$
$$= P_2^{(1)} P_2^{(2)} P_3^{(3)} + P_2^{(1)} P_2^{(2)} P_3^{(3)}$$

и

$$P(B) = P\left(\{(\Gamma, \Gamma, 2); (\Gamma, \Gamma, 4); (\Gamma, \Gamma, 6); (\Gamma, P, 2); (\Gamma, P, 4); (\Gamma, P, 6); (P, \Gamma, 2); (P, \Gamma, 4);\right.$$

$$(P, \Gamma, 6); (P, P, 2); (P, P, 4); (P, P, 6)\}) = P(\{(\Gamma, \Gamma, 2)\}) + P(\{(\Gamma, \Gamma, 4)\}) + P(\{(\Gamma, \Gamma, 6)\}) +$$

$$+ P(\{(\Gamma, P, 2)\}) + P(\{(\Gamma, P, 4)\}) + P(\{(\Gamma, P, 6)\}) + P(\{(P, \Gamma, 2)\}) + P(\{(P, \Gamma, 4)\}) +$$

$$+ P(\{(P, \Gamma, P, 6)\}) + P(\{(P, P, 2)\}) + P(\{(P, P, 4)\}) + P(\{(P, P, 4)\}).$$

Этим же путем можно вычислить вероятности событий C и D.

Как ранее отмечалось, изготовление монеты, близкой к идеальной, требует больших усилий и затрат. Каждая монета и игральная кость имеют свои вероятности. Предположим, что первая монета, используемая в эксперименте $\Re$ имеет вероятность выпадения Герба $0,47$, вторая монета - $0,52$ и игральная кость имеет смещенный центр тяжести с вероятностями выпадения сторон $1,2,3,4,5$ и 6 равных соответственно $0,16; 0,17; 0,15; 0,18; 0,18; 0,16$. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = P(\{(\Gamma, P, 5); (P, P, 3)\}) = P(\{(\Gamma, P, 5)\}) + P(\{(P, P, 3)\}) =$$
$$= 0,47 \cdot 0,48 \cdot 0,18 + 0,53 \cdot 0,52 \cdot 0,15 = 0,081948.$$

Читателю предлагается опять же провести серию экспериментов по подтверждению частотной интерпретации определения вероятностей для событий A, B, C и D, разумеется, для имеющихся у них двух монет и игральной кости.

Список литературы

1 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -Москва: Издательство "Наука", 1976. -543 стр.

2 Темиргалиев Н. Теории вложений и приближений в контексте К(В)П и внутренних проблем теории функций// Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Компьютерные науки. Механика. -2018. -Т. 125. № 4. -С. 8-68.

3 Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. -608 стр.

4 Темиргалиев Н. Теория вероятностей и математическая статистика. -Астана. 2010. Электронное издание.

5 Чернова Н.И. Теория вероятностей. - Новосибирск, СибГУТИ. -2009.- 128 с.

6 Реньи А. Письма о вероятности // Трилогия о математике. – М.: Мир, 1980. – С. 121–198.

А.Ж. Жұбанышева, Ғ.Е. Тауғынбаева, Н.Ж. Наурызбаев, Н. Темірғалиев

Теориялық математика және ғылыми есептеулер институты, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Сәтпаева, 2, Астана, 010008, Қазақстан

Ықтималдықтар теориясы оқулықтарындағы бір проблемалық мәселе туралы

Аннотация: Біздің ойымызша, Ықтималдықтар теориясы бойынша оқулықтарда кездесетін "*Тәжірибе жүргізілді, нәтижесі белгілі. Оқиға орындалды ма?*" проблемасы мен онымен байланысты ықтималдық анықтамасы мәнмәтініндегі оқиға орындалу жиілігін есептеу қарастырылады. Атап айтқанда, бұл тақырыптар теориялық және практикалық тұрғыдан егжей-тегжейлі қарастырылады.

Түйін сөздер: ықтималдық кеңістік, оқиға, оқиғаның орындалуы, ықтималдық, ақырлы нәтижелі тәжірибе.

A.Zh. Zhubanysheva, G.E. Taugynbayeva, N.Zh. Nauryzbayev, N. Temirgaliyev

Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan

About one Problematic Moment in Textbooks on Probability Theory

Abstract: In the article is studied, according to our opinion, the problematic moment "*An experiment was performed, the outcome is known. Did the event occur?*" and the associated calculations of the frequencies of the occurrence of this event in the context of determining the probability. Namely, theoretical and practical detailed discussions of these topics are justificated.

Keywords: probability space, event, event realization, probability, experiment with a finite number of outcomes.

References

1 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza[Elements of the theory of functions and functional analysis]. (Nauka Publishing House, Moscow, 1976, 543 p.).

2 Temirgaliyev N. Embedding and Approximation Theories in the Context of Computational (Numerical) Diameter and Internal Problems of the Theory of Functions, Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer science. Mechanics series, 2018. Vol. 125. No. 4. P. 8-68.

3 Fikhtengolts G.M. Teorii vlozhenij i priblizhenij v kontekste K(V)P i vnutrennih problem teorii funkcij [Course of differential and integral calculus]. Vol. 1. 680 p. Vol. 2. 864 p. Vol. 3. 662 p.

4 Temirgaliev N. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika [Probability theory and mathematical statistics]. Astana. 2010 [Elektron.].

5 CHernova N.I. Teoriya veroyatnostej[Probability Theory]. Novosibirsk, SibGUTI. 2009. 128 p.

6 Ren'i A. Pis'ma o veroyatnosti[Letters on Probability], Trilogiya o matematike[Trilogy on Mathematics]. (Mir, Moscow, 1980. P. 121–198).

Сведения об авторах:

Жубанышева А.Ж. – ***Автор для корреспонденции,***, PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан.

Таугынбаева Г.Е. – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан.

Наурызбаев Н.Ж. – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан.

Темиргалиев Н. – д.ф.-м.н., профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан.

Таугынбаева Г.Е. – PhD, старший научный сотрудник Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, ул. Сатпаева, 2, Астана, 010008, Казахстан.

Zhubanysheva A.Zh. – ***Corresponding author***, PhD, senior researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Taugynbayeva G.E. - PhD, senior researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Nauryzbayev N.Zh. - PhD, senior researcher of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Temirgaliyev N. - doctor of physical and mathematical sciences, director of the Institute of Theoretical Mathematics and Scientific Computations of L.N. Gumilyov Eurasian National University, Satpayev str., 2, Astana, 010008, Kazakhstan.

Поступила в редакцию 21.08.2022